

**Trabajo ganador del  
Primer Lugar**



**Inmunización del valor presente de flujos de efectivo de  
tesorerías de corporativos, inversionistas  
institucionales y fondos de pensiones con futuros del  
MexDer.**

**Francisco Venegas Martínez**

# INMUNIZACIÓN DEL VALOR PRESENTE DE FLUJOS DE EFECTIVO DE TESORERÍAS DE CORPORATIVOS, INVERSIONISTAS INSTITUCIONALES Y FONDOS DE PENSIONES CON FUTUROS DEL MEXDER

Dr. Francisco Venegas Martínez

Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México

---

## Resumen

En este trabajo de investigación se presenta un modelo de inmunización de flujos financieros, activos y/o pasivos, de tesorerías de corporativos, inversionistas institucionales y fondos de pensiones contra el riesgo de tasa de interés mediante el uso de contratos a futuro sobre bonos cupón cero, específicamente contratos a futuro sobre títulos de deuda pública del gobierno mexicano, certificados de la tesorería (CETES), que se encuentran listados en el MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S. A. de C. V. Las estrategias de cobertura que se derivan del modelo propuesto conducen a una reducción significativa del riesgo de mercado. Varias metodologías de valuación de bonos basadas en la dinámica de la tasa corta o la tasa forward instantánea se discuten y extienden. Asimismo, se revisan diversas técnicas de calibración de curvas de ceros. En particular, se estima la curva de rendimiento de CETES a través de una extensión de la metodología de Heath, Jarrow y Morton (1992). Los conceptos de duración y convexidad desempeñan un papel importante en el desarrollo de nuestra propuesta en cuanto a la medición y el control del riesgo de tasa de interés. Específicamente, se controla el riesgo de desplazamientos paralelos y moderados de la curva de rendimiento y no existe control sobre otros riesgos. La robustez de las estrategias obtenidas se evalúa con la metodología de valor en riesgo. A manera de ilustración, el modelo desarrollado es aplicado en la cobertura de un conjunto de flujos financieros.

*Clasificación JEL: G11, G13*

*Palabras clave: Inmunización de portafolios, contratos a futuro, riesgo de tasa de interés, valor en riesgo*

## Abstract

In this paper we present a model to immunize a future stream of assets and/or liabilities of corporate treasurer's offices, institutional investors, and pension funds against interest-rate risk by means of interest-rate futures contracts, specifically futures contracts on Mexican government bonds, treasury certificates (CETES), which are listed in the Mexican futures exchange, MexDer. Several bond pricing methodologies, based on the dynamics of either the short rate or the instantaneous forward rate are discussed and extended. Moreover, various yield curve calibration techniques are reviewed. In particular, we estimate the yield curve associated to CETES by extending the Heath, Jarrow, and Morton's model (1992). The Hedging strategies derived from the model reduce significantly the market risk. Concepts of duration and convexity play an important role in our proposal in measuring and controlling interest-rate risk. Specifically, the risk of small or moderate parallel shifts in the zero-coupon yield curve is controlled; however, there is no control on other risks. The robustness of the derived strategies is assessed in terms of the methodology of value at risk. As an illustration of the proposal, an application is addressed .

*JEL Classification: G11, G13*

*Keywords: Portfolio Immunization, interest-rate futures contracts, interest-rate risk, value at risk*

## 1. Introducción

El tamaño considerable que han alcanzado los mercados de futuros financieros, se debe en gran medida a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para entrar o salir rápidamente del mercado debido a la liquidez que generan (*i.e.*, siempre es posible encontrar compradores y vendedores) y al apalancamiento que presentan (*i.e.*, la inversión inicial es pequeña comparada con la de otros instrumentos). Además, dado que las operaciones se llevan a cabo en un mercado altamente organizado en el que se operan contratos futuros estandarizados, el riesgo contraparte es mínimo, o casi nulo, debido a la asociación del mercado con una cámara de compensación y liquidación, la cual actúa como contraparte de todas las partes bajo la administración de un esquema de márgenes y fondos propios, situación que garantiza el cumplimiento de las obligaciones adquiridas por todas las posiciones, cortas y largas.

El riesgo por fluctuaciones adversas en la tasa de interés se refleja en la posibilidad de que los flujos que se tienen planeados no se presenten ni en la magnitud ni en los tiempos que se esperan. Este riesgo puede reducirse, y en ocasiones eliminarse, si se cubre adecuadamente el valor presente de los flujos esperados tomando posiciones en contratos a futuro sobre bonos cupón cero. Los contratos a futuro, y en particular los que se refieren a títulos de deuda pública, son herramientas útiles que permiten a las tesorerías de corporativos, inversionistas institucionales y fondos de pensiones administrar el riesgo de mercado con costos bajos de transacción.

En la actualidad, se cuenta con un mercado reconocido por las autoridades financieras, fiscales y monetarias en el que se negocian y cotizan contratos futuros estandarizados, el MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S. A. de C. V. Este mercado especializado ha contribuido, en cierta medida, a generar un ambiente de estabilidad en la economía mexicana, pues cuando los futuros listados sobre bonos se utilizan adecuadamente, éstos protegen a los agentes económicos contra fluctuaciones adversas en el mercado, lo que modifica en forma positiva las expectativas económicas en el mediano y largo plazo. En conclusión, los contratos a futuro sobre bonos cupón cero son instrumentos que permiten a los agentes financieros cubrir sus posiciones pasivas y/o activas, en respuesta a sus expectativas económicas, reduciendo el riesgo y la incertidumbre.

La inmunización de un conjunto de flujos esperados consiste en determinar un portafolio de contratos a futuro sobre bonos cupón cero que genere los flujos de efectivo que se requieren para compensar las posibles pérdidas en el valor presente de dichos flujos. En este trabajo, las estrategias de inmunización se determinan con base en la sensibilidad a la fecha de inicio de la cobertura, así como de la duración y convexidad del valor presente de los flujos y de un conjunto de contratos a futuro sobre bonos cupón cero. Para evaluar la robustez de las estrategias obtenidas en términos globales, es decir, en términos del comportamiento histórico de la tasa de interés, se genera la distribución conjunta del valor presente de los flujos financieros y de los flujos propios que producen los contratos a futuro sobre bonos cupón cero. Se comparan las varianzas de las distribuciones empíricas de los flujos financieros con y sin cobertura, y se estiman, en ambos casos, pérdidas potenciales en términos del valor en riesgo en un periodo de tiempo dado.

La literatura disponible sobre inmunización y cobertura es extensa. Vale la pena destacar los trabajos de: González-Arechiga *et al.* (2000a,b) y (2001); Kolb (1998); Venegas-Martínez (2000), (2001a,b,c), (2002), (2003a,b,c); Venegas-Martínez y Carrillo (2002); Venegas-Martínez y Díaz-Tinoco (2001) y (2002); Venegas-Martínez y González-Arechiga (2000) y (2002); Zenios (1996); Fabozzi (1994); Chance (1990); Cox *et al.* (1979);

Platt (1986); Schaefer (1986); Chua (1984); Ingersoll et al. (1978); Bierwarg *et al.* (1978); Bierwarg *et al.* (1983a,b); Fabozzi y Pollack (1987); y Granito (1984). La literatura sobre valor en riesgo es también abundante, así que sólo mencionamos algunos trabajos: Jorion (1999); Beckstrom y Campbell (1995); y Kupiec (1995).

En esta investigación se discuten y extienden varias metodologías de valuación de contratos a futuro sobre bonos cupón cero basadas en la dinámica de la tasa corta o la tasa forward instantánea. Asimismo, en este trabajo de investigación se desarrolla un procedimiento para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos financieros con contratos a futuro sobre bonos cupón cero. Los conceptos de duración y convexidad, útiles en la medición y el control del riesgo por desplazamientos paralelos y moderados en la curva de rendimiento, desempeñan un papel primordial en la metodología propuesta. Con el propósito de generar curvas de rendimiento de CETES, se extiende el modelo de Heath, Jarrow y Morton (1992), al cual nos referiremos, en forma breve, como HJM. Posteriormente, se obtienen las distribuciones empíricas de un conjunto de flujos financieros con y sin inmunización, y se comparan los efectos en la varianza y en el valor en riesgo a niveles predeterminados de probabilidad.

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2, se presenta la ecuación diferencial parcial del comportamiento del precio de un contrato a futuro sobre un bono cupón cero. En la sección 3, se discute y extiende el modelo de Merton sobre tasa corta. En el transcurso de sección 4, se presenta y extiende el modelo de tasa corta de Vasicek bajo el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales. En la sección 5, se discute y extiende el modelo de tasa corta de Vasicek bajo el enfoque probabilista. En la sección 6, se presenta y extiende el modelo de tasa corta de Cox, Ingersoll y Ross. En la sección 7, se discute y extiende el Modelo de Ho y Lee útil en la calibración de la curva de rendimiento con precios actuales. En la sección 8, se desarrolla y extiende el modelo de Hull y White para calibrar la curva de rendimiento con una curva de rendimiento inicial. En la sección 9, se discute y extiende el modelo Longstaff, también conocido como el modelo de doble raíz. En la sección 10, se discute y extiende el modelo Brennan y Schwartz de dos factores “consol”. A través de la sección 11, se desarrolla y extiende el modelo de Black, Derman y Toy. En la sección 12, se aplica el teorema de Girsanov en valuación de bonos cupón cero. En la sección 13, se presenta y extiende el modelo de Heath, Jarrow y Morton. En la sección 14, se introduce la ecuación de compensación de un portafolio combinado de futuros y flujos. A través de la sección 15, se presenta un método local de inmunización de flujos financieros que no sólo utiliza duración y convexidad, sino también sensibilidad al tiempo. En el transcurso de la sección 16, se lleva a cabo la medición del valor en riesgo del valor presente de los flujos financieros con y sin cobertura. En la sección 17, se ilustra, con un ejemplo sencillo, el método propuesto en la inmunización del valor presente de un conjunto de flujos financieros. Por último, en la sección 18, se resumen los principales resultados de la investigación, se destacan las limitaciones y ventajas del método propuesto y, finalmente, se mencionan algunas líneas de investigación futura.

## 2. Ecuación diferencial parcial del comportamiento del precio de un contrato a futuro sobre un bono cupón cero

En esta sección se presenta una metodología para valuar un contrato a futuro sobre un bono cupón cero en términos de la evolución de la tasa de interés instantánea, también llamada tasa de interés “spot”, tasa corta de interés o simplemente tasa corta<sup>1</sup>. Específicamente, el precio de un bono cupón cero que se emite en  $t$  y que paga una unidad monetaria en el vencimiento, al tiempo  $T$ , está dado por

$$B = B(r_t, t, T) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

donde  $r_t$  es la tasa corta y  $\mathcal{F}_t$  es la información disponible al tiempo  $t$ . El precio de un contrato a futuro,  $U = U(0, K, B(r_t, t, T), t, T)$ , que se pacta en el tiempo 0 y que en el vencimiento, al tiempo  $t$ , entrega un bono que paga una unidad monetaria en  $T > t$ , a cambio de una cantidad preestablecida  $K$ , está dado por

$$\begin{aligned} U(0, K, B(r_t, t, T), t, T) &= \exp \{ R(0, T)T \} - K \exp \{ R(0, t)t \} \\ &= N \exp \left\{ - \int_0^T r_s ds \right\} - K \exp \left\{ - \int_0^t r_s ds \right\} \end{aligned}$$

ó

$$U(0, K, B(r_t, t, T), t, T) = (f_{t,T} - K) \exp \left\{ - \int_0^t r_s ds \right\},$$

donde

$$f_{t,T} = N \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\}.$$

Observe ahora que se puede escribir, en forma breve, el precio del contrato futuro como

$$V(r_t, t, T) \equiv U(0, K, B(r_t, t, T), t, T),$$

es decir, el precio de un contrato a futuro sobre un bono cupón cero es también función de la tasa instantánea  $r_t$ , dicho en otras palabras, un contrato futuro sobre un bono cupón cero puede verse también como un producto derivado de la tasa corta,  $r_t$ . Claramente, en el momento en que pacta el contrato, en ausencia de costos de transacción,  $V(r_t, 0, T) = 0$ . Por otro lado, el precio de un bono cupón cero que se emite en  $t$  y que paga una unidad monetaria en  $T$  también se puede escribir como:

$$B = B(r_t, t, T) = \mathbb{E} \left[ e^{R(t,T)(T-t)} \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

donde

$$R(r_t, t, T) = \frac{1}{T-t} \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\}$$

---

<sup>1</sup> Otra posibilidad consiste en valuar contratos a futuro sobre bonos cupón cero con base en la dinámica de la tasa forward instantánea  $f(t, T)$ .

es la curva de rendimiento, también llamada estructura de plazos, se sigue entonces que

$$V(r_t, t, T) \equiv U(B(R(t, T), t, T), t, T).$$

Es decir, cuando se considera en el contrato a futuro del bono su rendimiento en el plazo  $[t, T]$ ,  $R(r_t, t, T)$ , dicho rendimiento sigue siendo función de  $r_t$ .

## 2.1 Modelos estocásticos de tasa de interés corta

Es importante reconocer que el objetivo que persiguen, en general, los modelos de tasas de interés corta no es elaborar pronósticos precisos de su nivel, sino explicar en términos estadísticos el comportamiento del mercado. Así pues, estos modelos intentan describir esencialmente propiedades estadísticas del mercado, por ejemplo, tendencia, reversión, sesgo, curtosis, colas pesadas, intervalos de confianza, probabilidades de ocurrencia, precios promedio, etcétera. Sin que se demerite el gran avance teórico y práctico que se ha alcanzado en la disciplina.

Dado que no existe vencimiento instantáneo en el mercado de títulos de deuda, es importante contar con una definición práctica (operativa) de tasa corta. Se define la tasa corta como la tasa de interés de plazo más corto disponible en el mercado de bonos cupón cero. El supuesto de que la tasa corta se mantiene constante, o bien que su dinámica está determinada por una función conocida en el tiempo, difícilmente podría ser aceptado en la práctica. En general, se observa que la tasa de interés corta tiene un comportamiento impredecible. La tasa de interés corta que prevalece hoy en el mercado no tiene por qué ser la misma de mañana o de la semana entrante, su nivel dependerá de la oferta y la demanda por títulos de deuda al plazo más corto disponible en el mercado. Seguramente, las tesorerías de corporativos, los inversionistas institucionales y los fondos de pensiones podrían dar mejor cuenta del comportamiento impredecible de la tasa corta.

En vista de que no es posible predecir el comportamiento de la tasa corta, podría ser razonable modelarla a través de un proceso estocástico. Al respecto, el movimiento Browniano no sólo describe las fluctuaciones propias del mercado en muchos casos, sino también proporciona un conjunto de herramientas de análisis. Existen en la literatura un número importante de modelos de tasa corta ligados al movimiento Browniano.

Sea  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y sea  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  su filtración aumentada, la cual representa la información del mercado disponible hasta el tiempo  $t$ . Se supone que la dinámica estocástica de la tasa corta,  $r_t$ , es conducida por una ecuación de la forma:

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t, \quad (2.1)$$

donde  $\mu(r_t, t)$  y  $\sigma(r_t, t)$  son procesos adaptados a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ . Como puede observarse, el proceso  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  representa la única fuente de incertidumbre. En las secciones subsiguientes, se estudiarán varias formas funcionales de  $\mu(r_t, t)$  y  $\sigma(r_t, t)$  que determinan dinámicas específicas de la tasa corta. Es importante prevenir al lector de la notación simplificada que se utilizó en (2.1), la expresión correcta de (2.2) es

$$r_t = r_0 + \int_0^t \mu(r_u, u)du + \int_0^t \sigma(r_u, u)dW_u. \quad (2.2)$$

De hecho, la ecuación (2.1) es un abuso de notación, ya que el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral estocástica. Sin embargo, la mayor parte del desarrollo de la teoría financiera moderna utiliza como notación simplificada una ecuación diferencial estocástica, teniendo, por supuesto, siempre en mente una integral estocástica.

Con el propósito de asegurar que (2.2) tenga una solución única,  $r_t$ , adaptada a la filtración  $\mathbb{F}$ , se requiere que  $\mu(r_t, t)$  y  $\sigma(r_t, t)$  satisfagan la condición global de Lipschitz

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| \leq K|x - y| \quad \text{para toda } t \in [0, \infty) \text{ y } x, y \in \mathbb{R},$$

junto con la condición de crecimiento

$$\mu^2(x, t) + \sigma^2(x, t) \leq K(1 + x^2) \quad \text{para toda } t \in [0, \infty) \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

Asimismo, a fin de que la media y varianza del proceso (2.2) estén bien definidas, se requiere que se satisfagan las siguientes condiciones de integrabilidad, casi dondequiera con respecto de  $\mathbb{P}$ ,

$$\int_0^\infty |\mu(r_t, t)| dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \sigma^2(r_t, t) dt < \infty.$$

Bajo las condiciones anteriores existe un único proceso  $r_t$ , adaptado a la filtración  $\mathbb{F}$ , con media y varianza, condicionales en la información  $\mathcal{F}_0$ , finitas dadas, respectivamente, por

$$E[r_t | \mathcal{F}_0] = r_0 + \int_0^t \mu(r_u, u) du \leq \int_0^\infty |\mu(r_t, t)| dt < \infty$$

y

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_0] = \int_0^t \sigma^2(r_u, u) du.$$

## 2.2 Inmunización de un portafolio de contratos a futuro sobre bonos cupón cero

En lo que sigue se denotará el precio de un contrato a futuro sobre un bono cupón cero mediante  $V(r_t, t; T)$ . La valuación de contrato a futuro sobre un bono cupón cero es diferente a la valuación de un producto derivado de una acción, pues no existe un activo subyacente con el cual se cubra el derivado, ya que, a diferencia de una acción, la tasa corta,  $r_t$ , no tiene un precio. Una posibilidad de inmunizar un portafolio con dos contratos a futuro, consiste en cubrir un contrato a futuro con otro contrato, pero de posición contraria y vencimiento diferente.

Considere un portafolio con contratos a futuro con vencimientos diferentes  $T_1$  y  $T_2$ . De acuerdo con la notación previamente introducida, el contrato a futuro con vencimiento  $T_1$  tiene precio  $V_1(r_t, t; T_1)$  y el contrato futuro con vencimiento  $T_2$  tiene precio  $V_2(r_t, t; T_2)$ . El portafolio a cubrir consiste de  $w_1$  unidades del contrato a futuro de precio  $V_1(r_t, t; T_1)$  y  $w_2$  unidades del contrato a futuro de precio  $V_2(r_t, t; T_2)$ . Si denotamos el valor de este portafolio en la fecha  $t$  por  $\Pi_t$ , se tiene que:

$$\Pi_t = w_1 V_1 + w_2 V_2.$$

El cambio en el portafolio en el instante  $dt$ , debido a fluctuaciones en los precios de los contratos a futuro y no en el rebalanceo del portafolio (cambios en  $w_1$  ó  $w_2$ ), se calcula mediante el Lema de Itô. Así, por ejemplo, en el caso de  $V_1$  se tiene que

$$dV_1 = \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial r_t} \mu(r_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial V_1}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t,$$

en cuyo caso se encuentra que el cambio en el valor del portafolio satisface

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= w_1 dV_1 + w_2 dV_2 \\ &= w_1 \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} \right) dt + w_2 \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 V_2}{\partial r_t^2} \right) dt \\ &\quad + \left( w_1 \frac{\partial V_1}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial V_2}{\partial r_t} \right) \mu(r_t, t) dt + \left( w_1 \frac{\partial V_1}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial V_2}{\partial r_t} \right) \sigma(r_t, t) dW_t. \end{aligned}$$

Si se eligen  $w_1 = 1$  y  $w_2 = -(\partial V_1 / \partial r_t) / (\partial V_2 / \partial r_t)$ , el coeficiente de  $dW_t$  se anula y, como consecuencia, se elimina la componente aleatoria correspondiente a  $dW_t$ , es decir, se elimina el riesgo mercado. En este caso, se tiene que

$$d\Pi_t = \left[ \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} - \left( \frac{\partial V_1}{\partial r_t} / \frac{\partial V_2}{\partial r_t} \right) \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r_t^2} \right) \right] dt. \quad (2.3)$$

### 2.3 Existencia de un sistema bancario

Se supone que existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a la tasa  $r_t$  en cualquier tiempo  $t$ . Así pues, bajo la elección  $w_1 = 1$  y

$$w_2 = -(\partial V_1 / \partial r_t) / (\partial V_2 / \partial r_t)$$

en la composición del portafolio, éste puede resultar positivo en cuyo caso se presta  $\Pi_t$  y se genera durante  $dt$  un ingreso adicional  $d\Pi_t = r_t \Pi_t dt > 0$ , o bien puede resultar negativo, en cuyo caso se pide prestado  $\Pi_t$  y se genera durante  $dt$  una obligación  $d\Pi_t = r_t \Pi_t dt < 0$ . En cualquier caso,

$$d\Pi_t = r_t \Pi_t dt = r_t \left[ V_1 - \left( \frac{\partial V_1}{\partial r} / \frac{\partial V_2}{\partial r_t} \right) V_2 \right] dt. \quad (2.4)$$

### 2.4 Condición de equilibrio

Si se utilizan argumentos típicos de arbitraje, se sigue que (2.3) y (2.4) tienen que ser iguales. En efecto, suponga, por ejemplo, que  $\Pi_t > 0$  y que esta cantidad se presta al banco. Si esta alternativa de inversión generará una ganancia mayor que la de comprar un contrato a futuro, los agentes no podrían explotar esta ventaja indefinidamente ya que los precios en el mercado de contratos a futuros eventualmente se ajustarían, eliminando

oportunidades de arbitraje libres de riesgo. Después de igualar (2.3) con (2.4) y agrupar los términos tanto en  $V_1$  en el lado izquierdo, como en  $V_2$  en el lado derecho, se obtiene que

$$\left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\sigma^2(r_t, t)}{2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} - r_t V_1 \right) \Big/ \frac{\partial V_1}{\partial r_t} = \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{\sigma^2(r_t, t)}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial r_t^2} - r_t V_2 \right) \Big/ \frac{\partial V_2}{\partial r_t}.$$

Se observa que el lado izquierdo de la ecuación anterior es función de sólo de  $T_1$  y la del lado derecho es función sólo de  $T_2$ . Dado que ambos lados son iguales, se concluye entonces que los cocientes, de cada lado de la igualdad, son independientes de la fecha de vencimiento. Por lo tanto, ambos lados son iguales a alguna función que no depende del vencimiento, y que por conveniencia denotamos por  $-m(r_t, t)$ . Después de omitir los subíndices, los cuales son ahora innecesarios, se sigue que

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} - r_t V_t \right) \Big/ \frac{\partial V}{\partial r_t} = -m(r_t, t). \quad (2.5)$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + m(r_t, t) \frac{\partial V}{\partial r_t} - r_t V = 0. \quad (2.6)$$

La función  $m(r_t, t)$  será llamada tendencia neutral (al riesgo de mercado) del precio del contrato futuro. Para resolver (2.6) se requiere una forma funcional específica de  $m(r_t, t)$ , la cual se determina en la siguiente sección.

## 2.5 Ecuación diferencial parcial del precio de un contrato a futuro sobre un bono cupón cero, valuación neutral al riesgo

Si se aplica el lema de Itô a  $V_1$ , se tiene que

$$dV_1 = \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial V_1}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial V_1}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t.$$

Equivalentemente,

$$dV_1 = \mu_1(r_t, t) V_1 dt + \sigma_1(r_t, t) V_1 dW_t,$$

donde

$$\mu_1(r_t, t) = \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial V_1}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} \right) \Big/ V_1. \quad (2.7)$$

y

$$\sigma_1(r_t, t) = \left( \frac{\partial V_1}{\partial r_t} \right) \frac{\sigma(r_t, t)}{V_1}. \quad (2.8)$$

Expresiones semejantes puede derivarse para  $V_2$ . Considere ahora el valor del portafolio  $\Pi_t$

$$\Pi_t = \theta_1 V_1 + \theta_2 V_2.$$

Si las cantidades  $\theta_1$  y  $\theta_2$  no se modifican ante variaciones en el mercado, entonces

$$d\Pi_t = \theta_1 dV_1 + \theta_2 dV_2.$$

Es decir,

$$d\Pi_t = (\theta_1 \mu_1(r_t, t) V_1 + \theta_2 \mu_2(r_t, t) V_2) dt + (\theta_1 \sigma_1(r_t, t) V_1 + \theta_2 \sigma_2(r_t, t) V_2) dW_t. \quad (2.9)$$

Si se eligen

$$\theta_1 = \frac{\sigma_2(r_t, t)}{V_1(\sigma_2(r_t, t) - \sigma_1(r_t, t))}$$

y

$$\theta_2 = -\frac{\sigma_1(r_t, t)}{V_2(\sigma_2(r_t, t) - \sigma_1(r_t, t))},$$

el coeficiente del factor de riesgo  $dW_t$  se anula, entonces

$$d\Pi_t = \left( \frac{\sigma_2(r_t, t) \mu_1(r_t, t) - \sigma_1(r_t, t) \mu_2(r_t, t)}{\sigma_2(r_t, t) - \sigma_1(r_t, t)} \right) dt. \quad (2.10)$$

Si la expresión anterior se iguala con

$$d\Pi_t = \Pi_t r_t dt = (\theta_1 V_1 + \theta_2 V_2) r_t dt = r_t dt,$$

el cual es libre de riesgo al tiempo  $t$ , pues el nivel de la tasa  $r_t$  es conocido, se tiene que

$$\frac{\mu_1(r_t, t) - r_t}{\sigma_1(r_t, t)} = \frac{\mu_2(r_t, t) - r_t}{\sigma_2(r_t, t)}. \quad (2.11)$$

Es decir, el premio al riesgo, normalizado por la volatilidad, que ofrecen dos contratos a futuro de diferentes vencimientos es igual. En consecuencia, contratos a futuro de mayor volatilidad pagarán un mayor diferencial entre el rendimiento medio del contrato a futuro y la tasa libre de riesgo. Dado que en la ecuación (2.11), el lado dedeche sólo depende del vencimiento  $T_1$  y el izquierdo del vencimiento  $T_2$ , se sigue el premio al riesgo es independiente de la fecha de vencimiento del contrato a futuro, el cual será denotado por  $\lambda(r_t, T)$ . En virtud de las definiciones de  $\mu_1(r_t, t)$  en  $\sigma_1(r_t, t)$  dadas las ecuaciones (2.7) y (2.8), se tiene que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t) \sigma(r_t, t)) \frac{\partial V}{\partial r_t} - r_t V_t = 0. \quad (2.12)$$

Se observa que a partir de (2.6)

$$m(r_t, t) = \mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t) \sigma(r_t, t). \quad (2.13)$$

Es decir, la tendencia neutral al riesgo función de la tendencia y volatilidad de la tasa corta, así como del premio al riesgo. Para encontrar la solución de (2.12) se deben determinar una condición final y dos de frontera. La condición final corresponde al pago en el vencimiento

para un contrato a futuro  $V(r_T, T; T)$ . Las condiciones de frontera dependen de la forma de  $\mu(r_t, t)$  y  $\sigma(r_t, t)$ .

## 2.6 Reinterpretación del premio al riesgo

Observe que la ecuación (2.6) y el Lema de Itô conducen al siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t))\frac{\partial V}{\partial r_t} + r_t V &= 0, \\ dV &= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} + \frac{\partial V}{\partial r_t}\mu(r_t, t) \right] dt + \frac{\partial V}{\partial r_t}\sigma(r_t, t)dW_t, \end{aligned}$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned} dV - r_t V dt &= \sigma(r_t, t)\lambda(r_t, t)\frac{\partial V}{\partial r_t} dt + \frac{\partial V}{\partial r_t}\sigma(r_t, t)dW_t \\ &= \sigma(r_t, t)\frac{\partial V}{\partial r_t} (\lambda(r_t, t)dt + dW_t). \end{aligned} \tag{2.14}$$

El término  $dW_t$ , en el paréntesis del lado derecho de (2.14), representa el riesgo de mercado del contrato a futuro. El otro término dentro del paréntesis del lado derecho de (2.14) expresa el incentivo para adquirir un instrumento con riesgo. Así, si se hiciera un depósito de  $M_0$  unidades monetarias en un banco que paga la tasa corta de interés, el rendimiento en el instante  $dt$  está dado por  $dM_t/M_t = r_t dt$ . Note que al tiempo  $t$ , la tasa  $r_t$  es conocida. De esta manera, al comparar los diferenciales  $dM_t - r_t M_t dt$  y  $dV_t - r_t V_t dt$ , el primero tiene un valor cero, mientras que el segundo es igual a las variaciones del mercado modeladas con el término en  $dW_t$ , así como el premio esperado por adquirir un instrumento con riesgo, representado por  $\lambda(r_t, t)$ .

## 2.7 Tasa corta neutral al riesgo

A partir de (2.1) se tiene que

$$dr_t = (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) dt + \sigma(r_t, t) (\lambda(r_t, t)dt + dW_t), \tag{2.15}$$

la cual se puede comparar con

$$dV = r_t V dt + \sigma(r_t, t)\frac{\partial V}{\partial r_t} (\lambda(r_t, t)dt + dW_t). \tag{2.16}$$

De esta manera, las componentes estocásticas de (2.15) y (2.16) son idénticas. Por otro lado, en virtud de (2.6), se sigue que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t))\frac{\partial V}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} - r_t V_t = 0. \tag{2.17}$$

Así, la tendencia de (2.15) coincide con el coeficiente de  $\partial V / \partial r_t$  en (2.12). Es importante destacar la similitud de (2.17) con la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes.

## 2.8 Revisión de supuestos y conclusiones

En esta sección se enlistan los supuestos que se utilizaron para obtener la ecuación diferencial parcial del comportamiento de un contrato a futuro. La mayoría de estos supuestos permiten encontrar resultados de manera sencilla.

- (i) existe una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa corta;
- (ii) existe un mercado en el que se negocian contratos a futuro a todos los plazos;
- (iii) existe un sistema bancario, o si se prefiere un mercado de crédito, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a la tasa corta;
- (iv) no existen costos de transacción (impuestos o comisiones);
- (v) no existen oportunidades de arbitraje libres de riesgo;
- (vi) la información con que cuentan los agentes es simétrica.

### 3. Modelo de Merton

En 1973, Robert Merton propuso uno de los primeros modelos para explicar la dinámica estocástica de la tasa de interés instantánea. Este primer intento de modelar el comportamiento de la tasa corta, cuenta con varias limitaciones, entre las que se destacan: 1) existe una probabilidad positiva de que la tasa corta tome valores negativos; 2) no presenta reversión a la media, es decir, no existe un mecanismo que obligue a la tasa corta a regresar a su nivel de largo conforme el tiempo transcurre; 3) la esperanza y la varianza condicionales de la tasa corta crecen sin límite al transcurrir el tiempo; y 4) la curva de rendimiento y la tasa forward decrecen sin cota conforme el tiempo aumenta ¿Cuál es entonces el beneficio o ventaja de estudiar este modelo? A pesar de las limitaciones, el modelo de Merton representa el de tratamiento más simple y el más útil para introducir varios conceptos relacionados con el estudio de las tasas de interés. En capítulos posteriores se discutirán varios modelos más realistas que, en esencia, corrigen las limitaciones antes mencionadas.

#### 3.1 Dinámica estocástica de la tasa corta

Considere un movimiento Browniano  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración,  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ . Aquí,  $\mathcal{F}_t$  es toda la información relevante disponible en el tiempo  $t$ . El comportamiento de la tasa corta es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = bdt + \sigma dW_t, \quad (3.1)$$

donde  $b$  es una cantidad positiva, constante y conocida, y  $W_t$  es un proceso de Wiener estandarizado. Si  $s > t$ , entonces

$$r_s = r_t + b(s - t) + \sigma \int_t^s dW_u. \quad (3.2)$$

Claramente,  $r_t$  se distribuye normalmente con media (condicional)

$$\mathbb{E} [r_s | \mathcal{F}_t] = r_t + b(s - t) \quad (3.3)$$

y varianza (condicional)

$$\text{Var} [r_s | \mathcal{F}_t] = \sigma^2(s - t). \quad (3.4)$$

Observe que a partir de (3.3) se tiene que si  $s > t$ ,

$$\mathbb{E} [r_s + bs | \mathcal{F}_t] = r_t + bt.$$

es decir  $r_s - bs$  es una martingala. Equivalentemente, la tasa corta menos su tendencia es una martingala. En palabras más simple, el mejor pronóstico de  $r_s - bs$ , dada la información disponible hasta el tiempo  $t$ , es  $r_t - bt$ . Por último, note que  $\mathbb{E} [r_s | \mathcal{F}_t]$  y  $\text{Var} [r_s | \mathcal{F}_t]$  crecen sin cota conforme  $s$  aumenta.

### 3.2 Determinación del precio de un bono cupón cero

El precio de un bono cupón cero que se emite en  $t$  y que paga una unidad monetaria en el tiempo en  $T$  satisfice

$$B(t, T) = E \left\{ \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} \quad (3.5)$$

Considere primero la suma de las tasas cortas instantáneas durante  $[t, T]$

$$I(t, T) = \int_t^T r_s ds$$

y note que

$$\begin{aligned} I(t, T) &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \int_t^T \int_t^s dW_u ds \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \int_t^T (W_s - W_t) ds \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left( \int_t^T W_s ds - W_t(T - t) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observe ahora que integrando por partes la última integral de (3.6), se tiene que

$$\int_t^T s dW_s = TW_T - tW_t - \int_t^T W_s ds,$$

equivalentemente

$$\int_t^T W_s ds = TW_T - tW_t - \int_t^T s dW_s, \quad (3.7)$$

Por lo tanto, después de susutituir (3.7) en (3.6), se sigue que

$$\begin{aligned} I(t, T) &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left( TW_T - tW_t - \int_t^T s dW_s - W_t(T - t) \right) \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left( T(W_T - W_t) - \int_t^T s dW_s \right) \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left( T \int_t^T dW_s - \int_t^T s dW_s \right) \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left( \int_t^T (T - s) s dW_s \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Así pues,  $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$  es Normal, en consecuencia el precio del bono,  $B(r_t, t; T)$ , satisface

$$\begin{aligned} B(r_t, t; T) &= \mathbb{E} \left\{ \exp(-I(t, T)) \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mathbb{E}[I(t, T) \mid \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} \text{Var}[I(t, T) \mid \mathcal{F}_t] \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A partir de (3.8), se encuentra que

$$\mathbb{E} [I(t, T) \mid \mathcal{F}_t] = r_t(T - t) - \frac{1}{2}b(T - t)^2 \quad (3.10)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var} [I(t, T) \mid \mathcal{F}_t] &= \sigma^2 \int_t^T (T - s)^2 ds \\ &= \frac{\sigma^2}{3}(T - t)^3, \end{aligned} \quad (3.11)$$

en donde se ha utilizado el hecho

$$\text{Var} \left[ \int_t^T s dW_s \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \int_t^T s dW_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_t \right] = \int_t^T s^2 ds. \quad (3.12)$$

Por lo tanto,

$$B(r_t, t; T) = \exp \left\{ -r_t(T - t) - \frac{b}{2}(T - t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T - t)^3 \right\}. \quad (3.13)$$

### 3.3 Determinación de la curva de rendimiento

En esta sección se calcula la curva de rendimiento. Si se denotan  $D(t, T) = (T - t)$  y

$$A(T, t) = -\frac{b}{2}(T - t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T - t)^3, \quad (3.14)$$

entonces se puede escribir

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}.$$

Por lo tanto, la estructura de plazos de la tasa de interés está dado por

$$R(t, T) = -\ln B(t, T) = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T - t} = r_t + \frac{b}{2}(T - t) - \frac{\sigma^2}{6}(T - t)^2. \quad (3.15)$$

Es importante destacar en (3.15) que cambios en  $r_t$  conducen a movimientos paralelos en la curva de rendimiento. Asimismo, observe primero que

$$\frac{\partial}{\partial T} R(t, T) = -\frac{\sigma^2}{3}(T - t) < 0$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} R(t, T) = -\frac{\sigma}{3}(T-t)^2 < 0,$$

es decir la curva de rendimiento  $R(t, T)$  es una función decreciente en el plazo  $T$  y en la volatilidad,  $\sigma$ . Por otro lado, note que

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} R(t, T) = -\frac{\sigma^2}{3} < 0$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} R(t, T) = -\frac{1}{3}(T-t)^2 < 0$$

es decir,  $R(t, T)$  es una función cóncava tanto del plazo,  $T$ , como de la volatilidad,  $\sigma$ . Observe, por último, que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = R(t, \infty) = -\infty.$$

### 3.4 Dinámica de la tasa forward

La tasa forward instantánea se calcula a través de la siguiente ecuación:

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(t, T).$$

En este caso, se sigue que

$$f(t, T) = \frac{1}{2}b - \frac{1}{3}\sigma^2(T-t)^2.$$

Asimismo, observe que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(t, T) = f(t, \infty) = -\infty,$$

el cual es un resultado esperado, ya que  $R(t, T)$  es decreciente y cóncava en el plazo,  $T$ .

### 3.5 Determinación del precio del bono mediante ecuaciones diferenciales parciales

En esta sección, bajo el supuesto de tasa corta neutral al riesgo, se obtiene el precio del bono cupón cero mediante la solución de una ecuación diferencial parcial, de segundo orden y parabólica. Así pues, bajo el supuesto de tasa corta neutral al riesgo se tiene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + b \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \quad (3.16)$$

La condición final corresponde al pago en el vencimiento  $B(r_T, T; T) = 1$ . Las condiciones de frontera dependen de  $b$ ,  $\sigma$  y  $r_t$ .

Dado que la expresión anterior no cuenta con derivadas parciales cruzadas, se supone ahora una solución de variables separadas:

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t(T-t)}. \quad (3.17)$$

Note que  $A(T, T) = 0$ . Al diferenciar  $B$  en (3.7) se sigue que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial t} &= \left( \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \right) B, \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -(T - t)B, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= (T - t)^2 B.\end{aligned}$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (3.6), se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b(T - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)^2.$$

Después de resolver la ecuación diferencial ordinaria anterior se obtiene

$$\begin{aligned}A(t, T) &= - \int_t^T b(T - s)ds + \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^3, \\ &= - \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^3\end{aligned}\tag{3.18}$$

resultado que coincide con (3.14), como era de esperarse.

## 4. Modelo de tasa corta de Vasicek, enfoque de ecuaciones diferenciales parciales

En la sección anterior, se vio que el precio de un contrato forward puede establecerse de la siguiente forma

$$V(r_t, t, T) = U(R(r_t, t, T), t, T),$$

donde  $R(r_t, t, T)$  es la curva de rendimiento. En ocasiones, simplemente, se denotará a la curva de rendimiento como  $R(t, T)$ . En esta sección se presenta un modelo estocástico básico (más que básico, seminal) sobre el comportamiento de la tasa corta. A través de este modelo se obtiene el precio de un bono, a un plazo dado, como solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden y parabólica. Posteriormente, a partir de los precios (el llamado vector de precios) de dicho instrumento de renta fija se genera la estructura de plazos de la tasa de interés,  $R(t, T)$ , es decir, se determina la tasa de interés a todos los plazos en función de la tasa corta,  $r_t$  y de los parámetros del modelo. En particular, un bono cupón cero es un producto derivado de la tasa corta. En lo que sigue, se denotará el precio de bono cupón cero mediante  $B(r_t, t; T)$ , o en forma más simple como  $B(t, T)$ . Por último, es importante mencionar que las cantidades  $B(t, T)$  representan los factores de descuento que se utilizan en la valuación de muchos productos derivados. La relación entre la curva de rendimiento y el precio del bono es

$$R(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T - t}.$$

### 4.1 Fundamentos del modelo de Vasicek

Esta sección se concentra en el modelo de Vasicek (1977), uno de los llamados modelos de equilibrio general debido al uso de condiciones de arbitraje. Este modelo es muy útil debido a sus propiedades para valorar productos derivados de tasas de interés. La dinámica del modelo presenta reversión de la media hacia un valor constante, lo cual es una característica que se observa frecuentemente en el comportamiento de la tasa corta. Sea  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y sea  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  su filtración aumentada, la cual representa la información del mercado disponible hasta el tiempo  $t$ . El modelo de Vasicek tiene la forma:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (4.1)$$

donde  $r_t$  es la tasa corta, y  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$  son constantes positivas y conocidas. En este caso, como puede observarse,  $W_t$  es la única fuente de incertidumbre. La ecuación (4.1) es una notación simplificada de la expresión

$$\begin{aligned} r_t - r_s &= \int_s^t a(b - r_u)du + \int_s^t \sigma dW_u \\ &= ab(t - s) - \int_s^t ar_u du + \sigma \int_s^t dW_u. \end{aligned}$$

En la especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa corta, expresada en (4.1), la tasa corta es forzada a moverse, en promedio, hacia un nivel de largo plazo  $b$  a una velocidad  $a$ . Si la tasa corta está por arriba de  $b$ , ésta es forzada a moverse, en promedio, hacia abajo a un nivel de largo plazo  $b$  y, *viceversa*, si la tasa corta está por abajo de  $b$ , ésta es forzada a moverse, en promedio, hacia arriba al nivel de largo plazo  $b$ .

## 4.2 Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek

En esta sección, bajo el supuesto de tasa corta neutral al riesgo, se resuelve la ecuación diferencial parcial, de segundo orden y parabólica, del comportamiento de un bono cupón cero:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \quad (4.2)$$

La condición final corresponde al pago en el vencimiento para un bono cupón cero

$$B(T, T) = 1.$$

Las condiciones de frontera dependen de  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$  y, por supuesto,  $r_t$ . Dado que la ecuación (4.2) no cuenta con derivadas parciales cruzadas, se puede suponer una solución en variables separables de la siguiente forma:

$$B(t, T) = E \left\{ \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}. \quad (4.3)$$

Note que en la fecha de vencimiento, necesariamente,  $A(T, T) = 0$  y  $D(T, T) = 0$  ya que  $B(T, T) = 1$ . Al diferenciar  $B$  en (4.3) se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \left( \frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B, \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -D B, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= D^2 B. \end{aligned}$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (4.2), se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - a(b - r_t)D - r_t = 0,$$

ó

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD + r_t \left( -\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 \right) = 0. \quad (4.4)$$

Note que  $A$  y  $D$  son funciones de  $t$  y  $T$ , mientras que, en este caso,  $m(r_t, t) = -a(b - r_t)$  es sólo función de  $r_t$ . Si se deriva (4.4) con respecto a  $r_t$  se obtiene

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 = 0. \quad (4.5)$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1.$$

La solución de la ecuación diferencial anterior con condición final  $D(T, T) = 0$  satisfice

$$\begin{aligned}
D(t, T) &= D(T, T)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\
&= - e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\
&= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por lo tanto, al sustituir  $D(t, T)$  en (4.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial A}{\partial t} - r_t(aD - 1) + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + (ar_t - ab)D - r_t \\
&= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD.
\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = abD - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2,$$

o bien,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= b(t - T) - b \int_T^t e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{a^2} \int_T^t e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_T^t e^{-2a(T-s)} ds \\
&= b(t - T) - \frac{b}{a} \left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-2a(T-t)} - 1\right) \\
&= b(t - T) - \frac{b}{a} \left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1\right) + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-2a(T-t)} - 1\right) \\
&= \frac{1}{a^2}(t - T) \left(a^2b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{a^2}D \left(a^2b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-2a(T-t)} - 1\right) \\
&= \frac{1}{a^2}(D(t, T) - T + t) \left(a^2b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

### 4.3 Curva de rendimiento del modelo de Vasicek

En esta sección se determina la curva de rendimiento,  $R(t, T)$ , también llamada estructura de plazos de la tasa de interés asociada con el modelo de Vasicek. En este caso,

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T).$$

Observa que

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T) \\ &= \frac{1}{T-t} [r_t D(t, T) - A(t, T)] \\ &= \frac{1}{T-t} \left[ r_t D(t, T) + (D(t, T) - T + t) \left( b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a} \right] \\ &= r_t \frac{D(t, T)}{T-t} - \left( \frac{D(t, T)}{T-t} - 1 \right) \left( b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a(T-t)} \\ &= r_t \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - 1 \right) \left( b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a(T-t)})^2}{4a^3(T-t)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Si ahora se denota

$$R(t, \infty) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2},$$

entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} R(t, T) &= R(t, \infty) - [R(t, \infty) - r_t] \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2. \end{aligned}$$

Equivalentemente, en forma más breve,

$$R(t, T) = R(t, \infty) - [R(t, \infty) - r_t] D + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} D^2,$$

es decir, la curva de rendimiento,  $R(t, T)$ , es una función cuadrática de  $D(t, T)$ .

### 4.4 Precio de un bono cupón cero asociado al modelo de Vasicek

Observe que el precio de un bono cupón cero cuando la dinámica de la tasa corta es guiada por el modelo de Vasicek está dada por

$$B(t, T) = \exp \left\{ R(t, \infty) - [R(t, \infty) - r_t] D + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} D^2 \right\}.$$

## 4.5 Tasa forward instantánea del modelo de Vasicek

La tasa forward se calcula mediante

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} R(t, T)(T - t) = \frac{\partial}{\partial T} (r_t D - A) = r_t \frac{\partial D}{\partial T} - \frac{\partial A}{\partial T}.$$

Se recuerda que a partir de (4.10) y (4.11)

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$\begin{aligned} A &= b(t - T) - \frac{b}{a} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^3} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left( e^{-2a(T-t)} - 1 \right). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial D}{\partial T} = e^{-a(T-t)}$$

y, así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T} &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{a^2} e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} e^{-2a(T-t)} \\ &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} \right) \\ &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(t, T) &= r_t e^{-a(T-t)} + b - be^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 \\ &= b - (b - r_t) e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right)^2, \end{aligned}$$

o si se denota

$$f(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} f(t, T) = b,$$

entonces se puede escribir

$$f(t, T) = f(t, \infty) - [f(t, \infty) - r_t] e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right)^2.$$

En este caso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial T} &= a(b - r_t)e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) \\
&= a \left[ -b + (b - r_t)e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) \right] + ab \\
&= a \left[ -b + (b - r_t)e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{a^2} \left(1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}\right) \right] + ab \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{a} \left( e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} \right) \\
&= a \left[ -b + (b - r_t)e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2 \right] + ab \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) e^{-a(T-t)} \\
&= -af + ab + \frac{\sigma^2}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) e^{-a(T-t)},
\end{aligned}$$

lo cual implica que  $f = f(t, T)$  satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea

$$\frac{\partial f}{\partial T} + af = ab + \frac{\sigma^2}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) e^{-a(T-t)}.$$

## 4.6 Revisión de supuestos

En esta sección se enlistan los supuestos esenciales del modelo de Vasicek:

- (i) la tasa corta es guiada por un proceso exógeno Normal;
- (ii) el proceso que conduce a la tasa corta presenta reversión a la media;
- (iii) existe un mercado de crédito en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a la tasa corta neutral al riesgo;
- (iv) no existen oportunidades de arbitraje;
- (v) las tasas de interés, para algunos plazos, pueden ser negativas para algunos valores de los parámetros, lo cual podría ser una enorme limitación.

## 4.7 Aplicación del modelo de Vasicek

Considere el modelo de Vasicek

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

donde  $a$ ,  $b$ , y  $\sigma > 0$  son cantidades constantes, positivas y conocidas. Para fines prácticos, la ecuación anterior puede plantearse en términos discretos como una ecuación estocástica en diferencias. Si escribimos  $\beta_0 = ab$  y  $\beta_1 = 1 - a$ , entonces

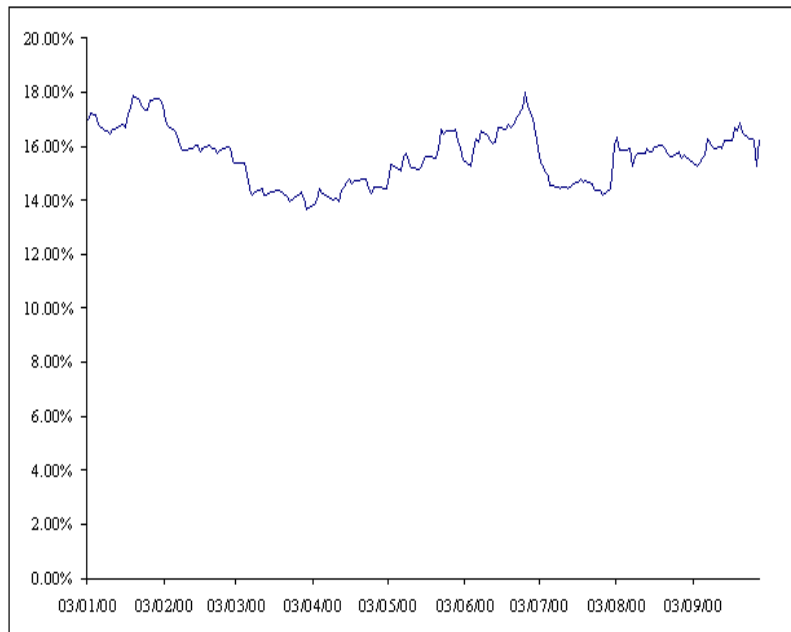
$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.9}$$

donde  $\{\varepsilon_t\}$  son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y varianza  $\sigma^2$ . La media (incondicional) de  $r_t$  es  $\beta_0/(1 - \beta_1) = b$  y su varianza (incondicional) es  $\sigma^2/(1 - \beta_1)^2 = \sigma^2/[1 - (1 - a)^2]$ . La varianza condicional de  $r_t$  es, por supuesto  $\sigma^2$ . La gráfica 1 muestra el comportamiento de la tasa corta (rendimiento anualizado de CETES a un día<sup>1</sup>), entre el 3 enero de 2000 y el 29 de diciembre de 2000. Los datos faltantes fueron estimados con la metodología del Filtro de Kalman<sup>2</sup>. Los resultados de la estimación de los parámetros del modelo autorregresivo (4.8), con errores estándar entre paréntesis, son como sigue:

$$r_t = 0.0289 + 0.8305r_{t-1}. \quad (4.10)$$

(0.0075) (0.02819)

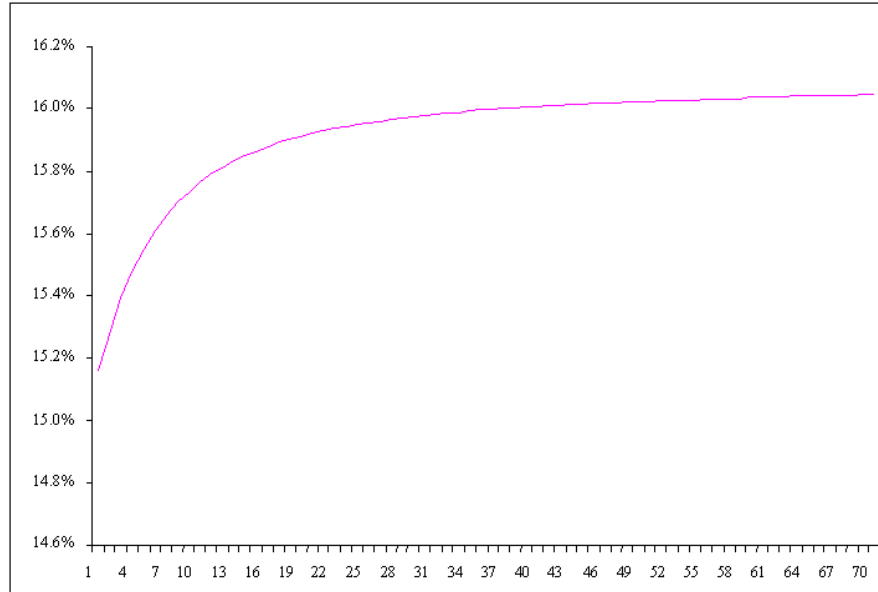
En este caso, se puede apreciar que las estimaciones son significativamente distintas de cero con un 95% de confianza. La gráfica 2 muestra la estructura de plazos definida a través de la ecuación (4.8) con  $t = 0$ ,  $a=0.1695$ ,  $b=0.1709$ ,  $r_0=0.15$  y  $\sigma = 0.0239$ . Como puede observarse, la estructura de plazos es creciente y, en el largo plazo, se estabiliza en un valor cercano al 16%.



Gráfica 4.1 Comportamiento de la tasa corta anualizada (3 enero de 2000 - 29 de diciembre de 2000).

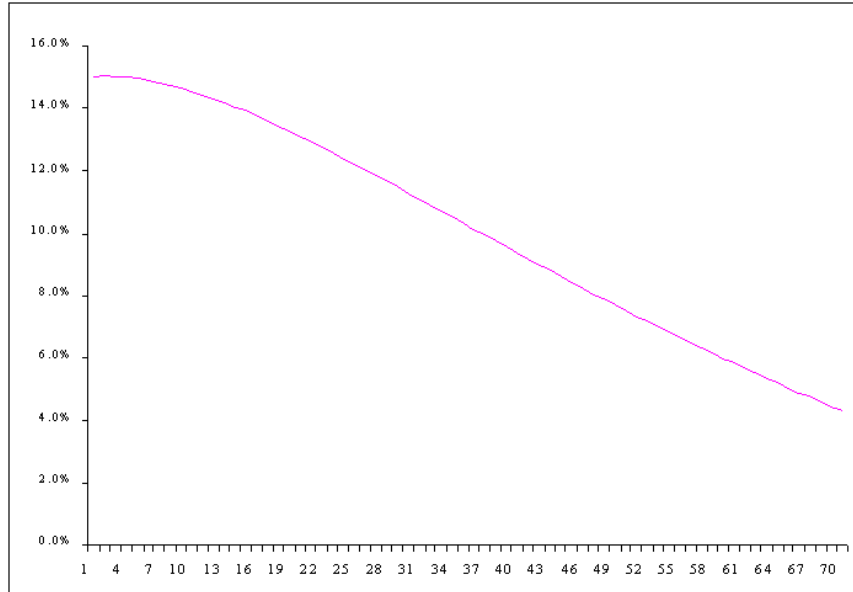
<sup>1</sup> En este caso, se utilizaron los vectores de precios que se publican en el Boletín de la Bolsa Mexicana de Valores, en su Sección de Análisis y Evaluación de Instrumentos de Deuda (varios números, 2000).

<sup>2</sup> Véase, por ejemplo, la metodología del Filtro de Kalman en Venegas-Martínez *et al.* (1999).

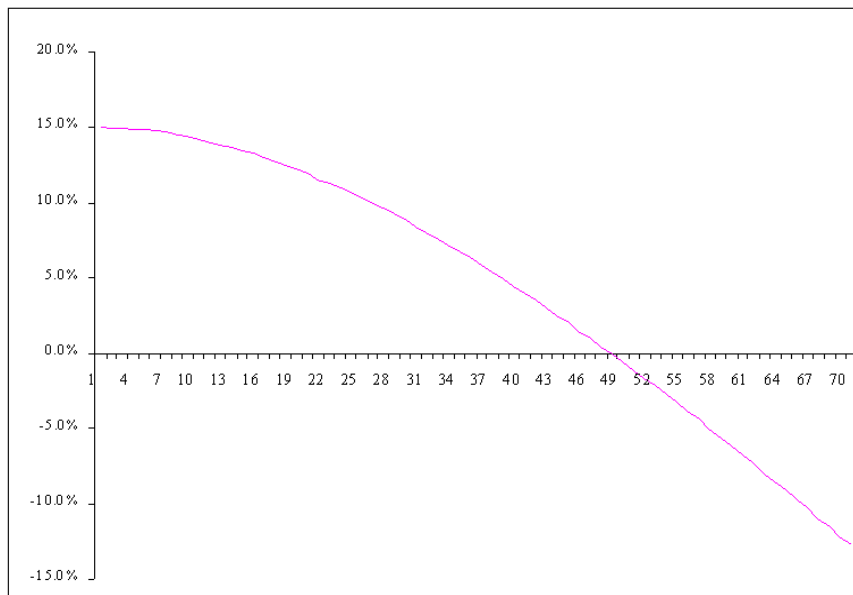


Gráfica 4.2 Estructura de plazos estimada (eje horizontal en días)

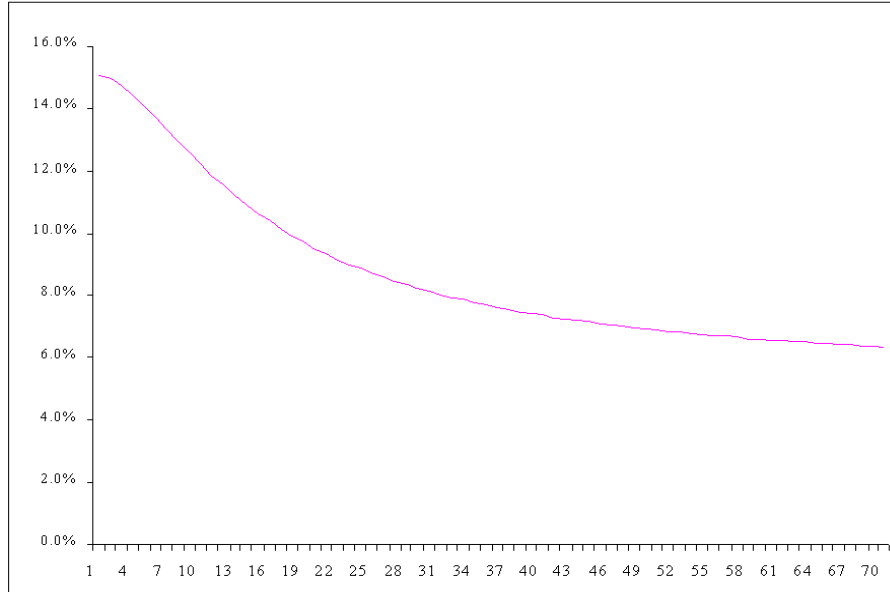
Las gráficas 4.3-4.6 muestran el comportamiento de la estructura de plazos ante cambios en uno de los parámetros, dejando los otros fijos con los valores del caso estimado (*Ceteris paribus*). Se observa, primero, que  $R(t, T)$  puede tener casi cualquier comportamiento (cóncava, convexa, etc.). En segundo lugar, note que  $R(t, T)$  puede tomar valores negativos para algunos valores de los parámetros. Cabe destacar que en el caso estimado, la función  $R(t, T)$  es siempre positiva y creciente.



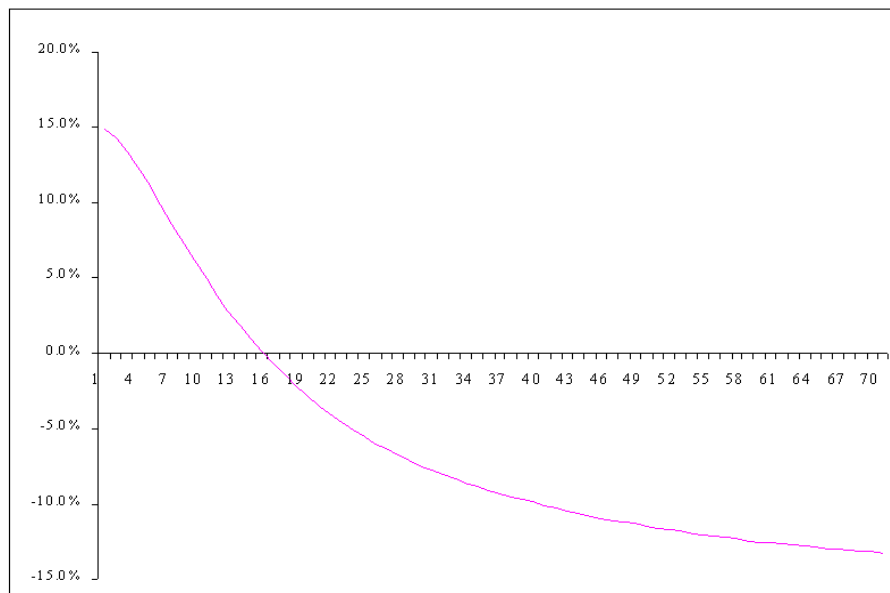
Gráfica 4.3  $a=0.0316$



Gráfica 4.4  $a=0.0101$



Gráfica 4.5  $\sigma = 0.0834$



Gráfica 4.6  $\sigma = 0.1414$

## 5. Modelo de tasa corta de Vasicek, enfoque probabilista

En la sección anterior se presentó el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales para determinar el precio teórico de un bono. Posteriormente, a partir de dicho precio se obtuvo la curva de rendimiento  $R(t, T)$ , la cual se utiliza en la determinación del precio de un contrato forward sobre un bono cupón cero,

$$V(r_t, t, T) = U(R(t, T), t, T).$$

A continuación se discute un desarrollo alternativo para calcular los factores de descuento con base en las propiedades de la distribución de  $dW_t$ . Considere de nuevo el modelo de Vasicek, el cual satisface:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (5.1)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$  son cantidades positivas, constantes y conocidas, y  $W_t$  es un proceso de Wiener estandarizado.

### 5.1 Distribución de la tasa corta

En esta sección se determina la distribución de la tasa corta y se establece la relación de los parámetros del modelo con la media y la varianza de la tasa corta. Si se hace el siguiente cambio de variable:

$$m_t = ar_t - ab,$$

el cual debe ser familiar al lector bajo el supuesto de tasa corta neutral al riesgo, entonces el modelo de Vasicek puede reescribirse como

$$dm_t = -am_t dt + a\sigma dW_t. \quad (5.2)$$

Esta ecuación es conocida como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. La importancia del proceso (5.2) es que su solución es similar a la de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden, es decir,

$$\begin{aligned} m_t &= m_0 e^{-at} + a\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \\ &= m_0 e^{-at} + a\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$ar_t - ab = (ar_0 - ab) e^{-at} + a\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

ó

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \quad (5.3)$$

Claramente,  $r_t$  se distribuye normal con media (condicional)

$$E[r_t | r_0] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \quad (5.4)$$

y varianza (condicional)

$$\text{Var}[r_t|r_0] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}), \quad (5.5)$$

en donde se ha utilizado la propiedad

$$\text{Var} \left( \int_0^t g(s) dW_s \right) = \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t g(s) dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t [g(s)]^2 ds$$

válida cuando la última integral es finita.

## 5.2 Casos especiales de la distribución inicial de la tasa corta

A continuación se discuten algunos casos de interés sobre la distribución de la tasa corta inicial. En virtud de (5.4) y (5.5), si se supone  $r_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2a)$  con  $\text{Cov}(r_t, W_t)=0$ , entonces

$$\mathbb{E}[r_t] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[r_t|r_0]\} = b(1 - e^{-at})$$

y

$$\text{Var}[r_t] = \text{Var}\{\mathbb{E}[r_t|r_0]\} + \mathbb{E}\{\text{Var}[r_t|r_0]\} = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-2at} + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) = \frac{\sigma^2}{2a}.$$

Asimismo, si  $r_0 \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2/2a)$  y  $\text{Cov}(r_t, W_t)=0$ , entonces

$$\mathbb{E}[r_t] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[r_t|r_0]\} = b$$

y

$$\text{Var}[r_t] = \text{Var}\{\mathbb{E}[r_t|r_0]\} + \mathbb{E}\{\text{Var}[r_t|r_0]\} = \frac{\sigma^2}{2a}.$$

## 5.3 Determinación del precio de un bono cupón cero

El precio de un bono cupón cero que se emite en  $t$  y que paga una unidad monetaria en el tiempo  $T$  satisface

$$B(r_t, t; T) = \mathbb{E} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}$$

donde  $\mathcal{F}_t$  es toda la información relevante disponible en el tiempo  $t$  (una filtración de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  perteneciente al espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$  donde  $W_t$  está definido.

Considere ahora la suma de las tasas cortas instantáneas durante  $[t, T]$ :

$$I(t, T) = \int_t^T r_s ds.$$

A continuación se verá que  $I(t, T)$  es normal. Del modelo de Vasicek se sigue que

$$\int_t^T dr_s = ab(T-t) - a \int_t^T r_s ds + \sigma \int_t^T dW_s.$$

Equivalentemente

$$r_T - r_t = ab(T-t) - aI(t, T) + \sigma \int_t^T dW_s.$$

En consecuencia,

$$I(t, T) = -\frac{1}{a}(r_T - r_t) + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s. \quad (5.6)$$

Por otro lado, del mismo modelo de Vasicek se tiene que si en (5.6) se sustituye 0 por  $t$  y  $t$  por  $T$ , es decir, se cambia de solución inicial y valor final, entonces

$$r_T = r_t e^{-a(T-t)} + b(1 - e^{-a(T-t)}) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r_T - r_t &= r_t (e^{-a(T-t)} - 1) + b(1 - e^{-a(T-t)}) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \\ &= (b - r_t) (1 - e^{-a(T-t)}) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A partir de (5.6) y (5.7), se encuentra que

$$\begin{aligned} I(t, T) &= -\frac{1}{a} \left[ (b - r_t) (1 - e^{-a(T-t)}) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \right] \\ &\quad + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_t \\ &= b(T-t) + (r_t - b) \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \sigma \int_t^T \left( \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} \right) dW_s. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Es decir,  $I(t, T)$  sigue una distribución normal

Ahora bien, de estadística elemental se sabe que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  está dada por

$$M_X(t) = \mathbb{E} [e^t X] = \exp \left\{ t\mathbb{E}[X] + \frac{1}{2}t^2 \text{Var}[X] \right\}.$$

En particular, para  $t = 1$  se tiene que si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ,

$$\mathbb{E} [e^X] = \exp \left\{ \mathbb{E}[X] + \frac{1}{2} \text{Var}[X] \right\}.$$

Por lo tanto, dado que  $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$  es normal, se tiene que el precio del bono,  $B(r_t, t; T)$ , satisface

$$B(r_t, t; T) = E \left\{ \exp(-I(t, T)) \mid \mathcal{F}_t \right\} = \exp \left\{ -E[I(t, T) \mid \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} \text{Var}[I(t, T) \mid \mathcal{F}_t] \right\}.$$

A partir de (5.8), se encuentra que

$$E[I(t, T) \mid \mathcal{F}_t] = b(T - t) + (r_t - b) \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(t, T) \mid \mathcal{F}_t] &= \sigma^2 \int_t^T \left( \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} \right)^2 ds \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left( T - t - 2 \int_t^T e^{-a(T-s)} ds + \int_t^T e^{-2a(T-s)} ds \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ T - t - \frac{2}{a} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right) + \frac{1}{2a} \left( 1 - e^{-2a(T-t)} \right) \right]. \end{aligned}$$

## 5.4 Determinación de la curva de rendimiento

En esta sección se calcula la estructura de plazos de la tasa de interés, también llamada curva de rendimiento. Si se supone, como antes, que

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}.$$

Entonces

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$\begin{aligned} A(t, T) &= -b(T - t) + bD(t, T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left[ T - t - \frac{2}{a} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right) + \frac{1}{2a} \left( 1 - e^{-2a(T-t)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{a^2} (t - T) (a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2) + \frac{1}{a^2} D (a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left( e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left( e^{-2a(T-t)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{a^2} (D(t, T) - T + t) (a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a}. \end{aligned}$$

Este resultado coincide plenamente con las ecuaciones (3.6) y (3.7) de la sección anterior.

## 5.5 Resumen y conclusiones

En la presente sección se calcularon los factores de descuento de un bono cupón cero cuando la tasa corta sigue el modelo de Vasicek. La propiedad de normalidad de la tasa corta simplifica analíticamente el cálculo del precio teórico del bono. Finalmente, a partir del modelo de la tasa corta se deriva la curva de rendimiento a distintos plazo. Situación que no es muy realista y en las siguientes secciones se verán modelos en donde la curva de rendimiento se calibra con los precios actuales.

## 6. Modelo de Cox, Ingersoll y Ross

Existe en la literatura una clase importante de modelos para describir el comportamiento de la tasa corta, también llamada tasa corta o tasa instantánea, cuando ésta sigue un proceso con reversión a la media y la dinámica está representada por la siguiente ecuación:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t, \quad (6.1)$$

donde  $a$ ,  $b$ , y  $\sigma$  son constantes positivas, y  $dW_t$  es un proceso normalizado de Wiener, es decir,  $W_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$  con incrementos,  $W_t - W_s$ ,  $s < t$ , independientes. Adicionalmente, existe un término aleatorio con varianza  $\sigma^2 r_t^{2\beta}$  por unidad de tiempo, donde  $\beta > 0$ . Las situaciones en las que  $\beta = 0$  y  $\beta = \frac{1}{2}$  son de particular interés porque conllevan a modelos que pueden tratarse analíticamente. En particular, el modelo de Vasicek se obtiene cuando  $\beta = 0$ , mientras que el modelo de Cox, Ingersoll y Ross se obtiene cuando  $\beta = \frac{1}{2}$ . Especificaciones de (6.1) con valores de  $\beta$  distintos 0 y  $\frac{1}{2}$  no son muy populares en la literatura debido a su complejidad.

### 6.1 Fundamentos del modelo CIR

Es importante mencionar que en la estructura de plazos generada con el modelo de Vasicek,  $\beta = 0$ , puede producir tasas negativas para ciertos valores de los parámetros. Afortunadamente, esta limitación se desvanece con el modelo de Cox, Ingersoll y Ross, ya que en este caso las tasas siempre son positivas. Esta sección se concentra en una dinámica de la tasa corta conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t. \quad (6.2)$$

Es importante observar que al considerar  $\sqrt{r_t}$  en el término estocástico el proceso deja de ser Normal. Este proceso presenta reversión a la media como en el modelo de Vasicek, pero la varianza es proporcional a  $\sigma^2 r_t$  por unidad de tiempo. Esto significa que conforme la tasa de interés corta aumenta, la desviación estándar aumenta.

### 6.2 Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono cupón cero

Al igual que los modelos de Vasicek y de Cox, Ingersoll y Ross, si  $r_t$  es la tasa corta neutral al riesgo, el precio de bono cupón cero,  $B(t, T)$ , satisface la ecuación diferencial parcial de segundo orden y parabólica:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B_t = 0. \quad (6.3)$$

### 6.3 Solución de la ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono cupón cero

De la misma manera, que en el modelo de Vasicek, se supone que la solución puede ser expresada en variables separables, específicamente:

$$B(t, T) = e^{A(t,T) - r_t D(t,T)}.$$

Claramente,  $A(T, T) = D(T, T) = 0$  ya que el valor nominal del bono está dado por

$$B(T, T) = e^{A(T,T) - r_T D(T,T)} = 1.$$

Al igual que en el caso del modelo de Vasicek, se tiene que:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B,$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = -D B$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = D^2 B.$$

Si se sustituyen las relaciones anteriores en (6.3)

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t D^2 B - r_t B + (a r_t - ab) D B = 0.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t D^2 - r_t + (a r_t - ab) D = 0 \quad (6.4)$$

Si derivamos (6.4) con respecto de  $r_t$ , se obtiene que:

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 D^2 + a D - 1 = 0. \quad (6.5)$$

Es decir,

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 \left( D^2 + \frac{2aD}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^2} \right). \quad (6.6)$$

Si se reescribe (6.5) en términos de fracciones parciales

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 (D - x_1)(D + x_2),$$

se encuentra que

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}$$

y

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(D - x_1)(D + x_2) &= D^2 + Dx_2 - Dx_1 - x_1x_2 \\ &= D^2 + D(x_2 - x_1) - x_1x_2.\end{aligned}$$

En este caso, se debe cumplir que:

$$x_2 - x_1 = \frac{2a}{\sigma^2}$$

y

$$x_1x_2 = \frac{2}{\sigma^2}.$$

Se observa que  $x_1, x_2 > 0$ . Por lo tanto,

$$\frac{dD}{(D - x_1)(D + x_2)} = \frac{1}{2}\sigma^2 dt.$$

Así,

$$\int_{D(T,T)=0}^{D(t,T)} \frac{du}{(u - x_1)(u + x_2)} = \int_T^t q du = -q(T - t),$$

donde  $q = \frac{1}{2}\sigma^2$ . El integrando se puede expresar en términos de fracciones parciales como

$$\begin{aligned}\frac{1}{(u - x_1)(u + x_2)} &= \frac{C_1}{u - x_1} + \frac{C_2}{u + x_2} \\ &= \frac{C_1(u + x_2) + C_2(u - x_1)}{(u - x_1)(u + x_2)} \\ &= \frac{(C_1 + C_2)u + C_1x_2 - C_2x_1}{(u - x_1)(u + x_2)},\end{aligned}$$

lo cual implica que  $C_1 = -C_2$  y  $C_1x_2 - C_2x_1 = 1$ . Por lo tanto,

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}} = \frac{q}{\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{D(t,T)} \frac{du}{(u-x_1)(u+x_2)} &= \frac{1}{x_1+x_2} \int_0^{D(t,T)} \frac{du}{u-x_1} \\
&\quad - \frac{1}{x_1+x_2} \int_0^{D(t,T)} \frac{du}{u+x_2} \\
&= \frac{1}{x_1+x_2} [\ln(x_1 - D(t,T)) - \ln(x_1)] \\
&\quad - \frac{1}{x_1+x_2} [\ln(x_2 + D(t,T)) - \ln(x_2)] \\
&= \frac{1}{x_1+x_2} \ln \left( 1 - \frac{D(t,T)}{x_1} \right) \\
&\quad - \frac{1}{x_1+x_2} \ln \left( 1 + \frac{D(t,T)}{x_2} \right) \\
&= \frac{1}{x_1+x_2} \ln \left[ \left( 1 - \frac{D(t,T)}{x_1} \right) / \left( 1 + \frac{D(t,T)}{x_2} \right) \right],
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que  $\ln(|D(t,T) - x_1|) = \ln(x_1 - D(t,T))$  y  $\ln(|x_1|) = \ln(x_1)$ . En consecuencia,

$$\left( 1 + \frac{D(t,T)}{x_2} \right) = \left( 1 - \frac{D(t,T)}{x_1} \right) e^{(x_1+x_2)q(T-t)},$$

lo cual implica que

$$x_1x_2 + x_1D(t,T) = (x_1x_2 - x_2D(t,T))e^{(x_1+x_2)q(T-t)}.$$

$$D(t,T) = \frac{x_1x_2 (e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1)}{x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + x_1}.$$

Claramente,  $D(t,T) < x_1$ , si y sólo si

$$\frac{x_1x_2 (e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1)}{x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + x_1} < x_1,$$

si y sólo si

$$x_1x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} < 1 + x_1x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + x_1^2,$$

así efectivamente  $\ln(|D(t,T) - x_1|) = \ln(x_1 - D(t,T))$ . Ahora bien, dado que  $x_1x_2 = 1/q$ ,  $D(t,T)$  se puede reescribir como:

$$D(t,T) = \frac{e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1}{qx_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + qx_1}.$$

Equivalentemente,

$$D(t,T) = \frac{2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1)}{2qx_2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1) + 2q(x_1 + x_2)}.$$

Por lo tanto,

$$D(t, T) = \frac{2(e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)} - 1)}{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2})(e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}$$

Al regresar a la fórmula (6.4), se tiene ahora que

$$\frac{\partial A}{\partial t} + r_t \left( -\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + aD - 1 \right) - abD = 0. \quad (6.7)$$

Si se sustituye (6.5) en (6.7), se produce que

$$\frac{\partial A}{\partial t} = abD.$$

Es decir,

$$A(t, T) - A(T, T) = abx_1x_2 \int_T^t \frac{(e^{(x_1+x_2)q(T-s)} - 1)}{x_2(e^{(x_1+x_2)q(T-s)} - 1) + (x_1 + x_2)} ds.$$

Sea

$$v = e^{(x_1+x_2)q(T-s)} - 1,$$

entonces

$$dv = -(x_1 + x_2)qe^{(x_1+x_2)q(T-s)} ds = -(x_1 + x_2)q(v + 1)ds,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} A(t, T) &= abx_1x_2 \int_t^T \left( \frac{v}{x_2v + x_1 + x_2} \right) \left( \frac{1}{(x_1 + x_2)q(v + 1)} \right) dv \\ &= \frac{abx_1x_2}{(x_1 + x_2)q} \int_t^T \frac{v}{[x_2v + x_1 + x_2](v + 1)} dv \\ &= \frac{abx_1}{(x_1 + x_2)q} \int_t^T \frac{v}{[v + 1 + (x_1/x_2)](v + 1)} dv. \end{aligned}$$

Defina, por el momento,  $\alpha = 1 + (x_1/x_2)$  y  $\beta = 1$ . Considere la integral y su solución por fracciones parciales

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{v}{(v + \alpha)(v + \beta)} dv &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \int_t^T \frac{dv}{v + \alpha} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \int_t^T \frac{dv}{v + \beta} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \ln(v + \alpha) \Big|_t^T - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \ln(v + \beta) \Big|_t^T \\ &= \frac{\alpha}{\beta - \alpha} \ln(v_t + \alpha) - \frac{\beta}{\beta - \alpha} \ln(v_t + \beta). \end{aligned}$$

ya que  $v_T = 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= \frac{abx_1}{(x_1 + x_2)q} \left( \frac{x_2}{x_1} \ln(v_t + 1) - \frac{x_1 + x_2}{x_1} \ln(v_t + 1 + (x_1/x_2)) \right) \\
&= \frac{ab}{(x_1 + x_2)q} [x_2 \ln(v_t + 1) - (x_1 + x_2) \ln(v_t + 1 + (x_1/x_2))] \\
&= \frac{2ab}{\sigma^2} \left[ \ln \left[ (v_t + 1)^{x_2/(x_1+x_2)} \right] - \ln(v_t + 1 + (x_1/x_2)) \right] \\
&= \frac{2ab}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{(v_t + 1)^{x_2/(x_1+x_2)}}{v_t + 1 + (x_1/x_2)} \right] \\
&= \frac{2ab}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{x_2(v_t + 1)^{x_2/(x_1+x_2)}}{x_2v_t + x_1 + x_2} \right] \\
&= \frac{2ab}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{2qx_2(v_t + 1)^{x_2/(x_1+x_2)}}{2qx_2v_t + 2q(x_1 + x_2)} \right] \\
&= \frac{2ab}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{2qx_2e^{x_2q(T-t)}}{2qx_2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1) + 2q(x_1 + x_2)} \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A(t, T) = \ln \left[ \frac{2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2} e^{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}) \frac{(T-t)}{2}}}{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2})(e^{\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}} \right]^{2ab/\sigma^2}.$$

#### 6.4 Precio de un bono cupón cero con el modelo CIR en términos de funciones trigonométricas hiperbólicas

observe que si se definen

$$\gamma = 2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \quad \text{y} \quad \tau = T - t$$

y se utilizan las identidades

$$\sinh(\gamma\tau) = \frac{e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau}}{2}$$

y

$$\cosh(\gamma\tau) = \frac{e^{\gamma\tau} + e^{-\gamma\tau}}{2},$$

entonces  $D(t, T)$  y  $A(t, T)$  pueden escribirse en forma alternativa como:

$$D(t, t + \tau) = \frac{\sinh(\gamma\tau)}{\gamma \cosh(\gamma\tau) + \frac{1}{2}a\sinh(\gamma\tau)}$$

y

$$A(t, t + \tau) = \frac{2ab}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{\gamma e^{\frac{1}{2}a\tau}}{\gamma \cosh(\gamma\tau) + \frac{1}{2}a\sinh(\gamma\tau)} \right].$$

## 6.5 Curva de rendimiento del modelo CIR

Como en el caso del modelo de Vasicek, es posible obtener curvas de rendimiento con pendiente positiva, con pendiente negativa o con jorobas. La curva de rendimiento del modelo CIR se calcula como sigue:

$$R(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T - t} = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T - t},$$

la cual es una función lineal de  $r_t$ . Asimismo, note que a partir de  $r_t$  se determina la estructura intertemporal de plazos de la tasa de interés.

## 6.6 Cambio de variable en el modelo CIR para obtener varianza constante

Si se define  $y_t \equiv y(r_t, t) = 2\sqrt{r_t}$ , se tiene que

$$\frac{\partial y_t}{\partial r_t} = \frac{1}{r_t} = \frac{2}{y_t}$$

y

$$\frac{\partial^2 y_t}{\partial r_t^2} = -\frac{1}{2r_t\sqrt{r_t}} = -\frac{1}{r_t y_t}.$$

Una aplicación simple del lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned} dy_t &= \left( \frac{\partial y_t}{\partial r_t} a(b - r_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y_t}{\partial r_t^2} \sigma^2 r_t \right) dt + \frac{\partial y_t}{\partial r_t} \sigma \sqrt{r_t} dW_t \\ &= \left[ \frac{2}{y_t} a \left( b - \frac{y_t^2}{4} \right) - \frac{1}{2r_t y_t} \sigma^2 r_t \right] dt + \frac{2}{y_t} \sigma \sqrt{r_t} dW_t \\ &= \left[ \left( 2ab - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{1}{y_t} - \frac{a}{2} y_t \right] dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

## 6.7 Estimación de los parámetros

A continuación se muestran varios métodos de estimación de los parámetros del modelo CIR con base en un registro histórico de la tasa corta.

### 6.7.1 Estimación de los parámetros del modelo CIR con MGM

Considere la versión discreta del modelo CIR

$$r_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 r_t + \sqrt{r_t} \epsilon_t, \quad (6.8)$$

donde  $\beta_0 = ab$  y  $\beta_1 = 1 - a$ . En este se calculan estimadores,  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\sigma}$ , con el método generalizado de momentos, MGM, sujeto a las restricciones

$$\sum_{t=1}^n \epsilon_t = 0, \quad \sum_{t=1}^n \epsilon_t \epsilon_{t-1} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 - r_t \sigma^2 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\hat{a} = 1 - \hat{\beta}_1$$

y

$$\hat{b} = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{a}}.$$

El MGM no requiere de un supuesto sobre la distribución de los errores.

### 6.7.2 Estimación de los parámetros del modelo CIR transformado en un modelo de varianza constante con MCO

Considere la ecuación (6.8) en la siguiente versión discreta

$$y_{t+1} = \beta_1 y_t^{-1} + \beta_2 y_t + \epsilon_t, \quad (6.9)$$

donde  $y_t = 2\sqrt{r_t}$ ,  $\beta_1 = 2ab - (\sigma^2/2)$ ,  $\beta_2 = 1 - (a/2)$  y  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Si  $\tilde{\beta}_1$ ,  $\tilde{\beta}_2$  y  $\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\sigma}^2$  son los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios, MCO, los cuales son de máxima verosimilitud, entonces

$$\tilde{a} = 2(1 - \tilde{\beta}_2)$$

y

$$\tilde{b} = \frac{2\tilde{\beta}_1 + \tilde{\sigma}^2}{4\tilde{a}} = \frac{2\tilde{\beta}_1 + \tilde{\sigma}^2}{8(1 - \tilde{\beta}_2)},$$

los cuales también son de máxima verosimilitud.

### 6.7.3 Estimación de los parámetros utilizando la curva de rendimiento del modelo CIR (Newton Raphson)

Considere la curva de rendimiento del modelo CIR:

$$R(t, T) = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T - t}.$$

Las funciones  $D(t, T)$  y  $A(t, T)$  dependen de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$ , lo cual se destaca mediante la notación  $D(t, T; a, b, \sigma)$  y  $A(t, T; a, b, \sigma)$ . A continuación, se fijan tres plazos, la magnitud de los cuales depende del horizonte al que se quiera estimar la curva de rendimiento (semanas, meses ó años). Sea  $\bar{R}(t, T_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , la tasa de interés promedio de plazo  $T_i$ . Considere el siguiente sistema de tres ecuaciones en las incognitas  $a$ ,  $b$  y  $\sigma$ :

$$\begin{cases} \bar{R}(t, T_1)(T_1 - t) - r_t D(t, T_1; a, b, \sigma) + A(t, T_1; a, b, \sigma) = 0, \\ \bar{R}(t, T_2)(T_2 - t) - r_t D(t, T_2; a, b, \sigma) + A(t, T_2; a, b, \sigma) = 0, \\ \bar{R}(t, T_3)(T_3 - t) - r_t D(t, T_3; a, b, \sigma) + A(t, T_3; a, b, \sigma) = 0, \end{cases}$$

el cual se resuelve mediante el método de Newton Raphson.

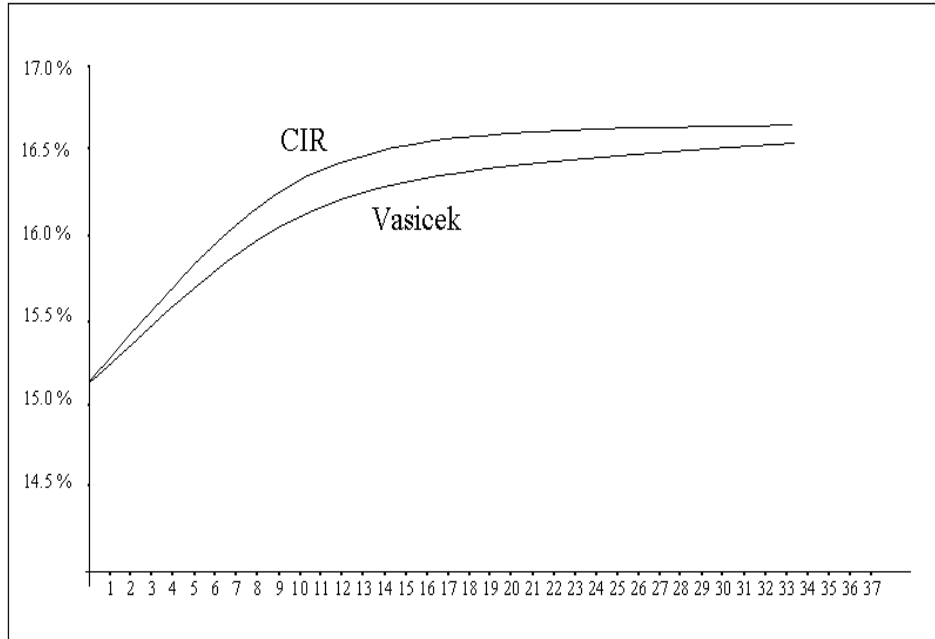
## 6.8 Aplicación del modelo de Cox, Ingersoll y Ross con el MGM

Para fines prácticos se utiliza una versión de la ecuación (6.8). Los resultados de la estimación de los parámetros con los mismos datos utilizados en el modelo de Vasicek, con errores estándar entre paréntesis, son los siguientes:

$$\Delta r_{t+1} = 0.01737(0.1682 - r_t) + 0.0399\sqrt{r_t}.$$

(0.0221) (0.0253) (0.0118)

Todas las estimaciones son significativamente distintas de cero con un 95% de confianza. La gráfica 6.1 muestra la estructura de plazos definida a través de la ecuación (12). En este caso, la estructura de plazos es creciente y, en el largo plazo, se estabiliza en un valor cercano al 16.5%. Se observa que el modelo CIR produce tasas mayores que el Vasicek, con una diferencia máxima del 0.05% conforme el plazo crece, lo cual se debe fundamentalmente a un valor estimado mayor que  $b$  con el Método de Momentos Generalizado.



Gráfica 6.1 Estructura de plazos estimada con el modelo CIR.

## 7. Modelo de Ho y Lee, calibración de la curva de rendimientos con precios actuales

Hasta ahora, se ha visto que partir de modelos exógenos de tasas de interés corta, con un solo factor de incertidumbre, se construyen curvas de rendimiento en función del valor más reciente de la tasa corta y de los parámetros que intervienen en el modelo. En cuyo caso, hay que decidirse por un método de estimación de los parámetros en cuestión. Si se estiman los parámetros con base en registros históricos de la tasa corta, entonces se genera una curva de rendimiento que, salvo en raras ocasiones, es parecida a la del mercado. Una alternativa muy popular consiste en calibrar curvas de rendimiento utilizando precios de mercado actuales. En la práctica, los modelos que consideran un solo factor son aquéllos que permiten ser calibrados con los precios actuales. Esto significa que uno o más parámetros del modelo dependen del tiempo. Esta dependencia funcional del tiempo tiene que ser elegida con cuidado a fin de obtener mejores resultados con el modelo empleado.

En el modelo propuesto por Ho y Lee (1986), la tendencia de la tasa corta y, por ende, la curva de rendimiento, se calibran con base en los precios de mercado actuales de tal manera que los precios del mercado coincidan con los precios teóricos. Esta es una de las razones por la que el modelo de Ho y Lee no pertenece a la clase de modelos de tasas de equilibrio general. Por otro lado, en los modelos de Vasicek y de Cox, Ingersoll y Ross, la estimación de todos los parámetros se lleva a cabo mediante una serie histórica de la tasa corta, mientras que en el modelo de Ho and Lee sólo el parámetro de volatilidad se estima con un registro histórico de la tasa corta, pues como se menciono antes, la curva de rendimiento se calibra utilizando precios actuales.

Por último, vale la pena destacar que al igual que en el modelo de Vasicek, el de Ho y Lee puede producir valores negativos de  $r_t$ , lo cual es una limitación importante que resuelve el modelo de Cox, Ingersoll y Ross. Aun cuando la probabilidad de que se presenten valores negativos en los modelos de Vasicek y de Ho y Lee sea muy pequeña, la posibilidad de que estos valores ocurran siempre está presente.

### 7.1 Planteamiento del modelo

El modelo de tasa corta propuesto por Ho y Lee considera, como en los modelos de Vasicek y de Cox, Ingersoll y Ross, un solo factor de incertidumbre. En este modelo la tendencia es dependiente del tiempo e independiente del nivel de la tasa corta. El comportamiento de la tasa corta es conducido por el siguiente proceso:

$$dr_t = h_t dt + \sigma dW_t. \quad (7.1)$$

donde  $\sigma > 0$  es una cantidad constante,  $h_t$  es una función del tiempo y  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ . Es decir, la dinámica estocástica de la tasa corta sigue una distribución normal y

$$r_t = r_0 + \int_0^t h_s ds + \sigma \int_0^t dW_s.$$

En este caso, la media y varianza de la tasa corta satisfacen, respectivamente,

$$E[r_t | \mathcal{F}_0] = r_0 + \int_0^t h_s ds$$

y

$$\text{Var}[r_t|\mathcal{F}_0] = \sigma^2 t,$$

donde  $\mathcal{F}_0$  es la información relevante disponible en  $t = 0$ . La función  $h_t$  determina, en promedio, hacia donde se moverá  $r_t$  en el futuro. Observe también que aunque  $h_t$  es dependiente del tiempo, es independiente del nivel de  $r_t$ . La función  $h_t$  se elegirá de tal manera que la estructura de plazos de la tasa de interés sea consistente con los precios actuales. El modelo no presenta reversión a la media. Finalmente, observe que la volatilidad es constante, es decir, es independiente del nivel de la tasa corta y del tiempo.

## 7.2 Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono cupón cero

Al igual que los modelos de Vasicek y de Cox, Ingersoll y Ross, el precio de bono cupón cero,  $B(t, T)$ , satisface la ecuación diferencial parcial de segundo orden parabólica:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - r_t B = m(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r}. \quad (7.3)$$

Si se elige  $m(r_t, t) = -h_t$ , es decir, si  $m(r_t, t)$  es tal que  $r_t$  es la tasa corta neutral al riesgo, entonces

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + h_t \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0, \quad (7.4)$$

con la condición final  $B(T, T) = 1$ . Dado que la ecuación anterior no tiene derivadas parciales cruzadas, se puede suponer una solución en variables separables de la forma:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t(T-t)}. \quad (7.5)$$

Claramente, en este caso, se cumple que  $A(T, T) = 0$ , ya que el valor nominal del bono en el tiempo  $T$ , está dado por

$$B(T, T) = e^{A(T, T)} = 1.$$

Observe ahora que

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \right) B,$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = -(T - t)B$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = (T - t)^2 B.$$

Si se sustituyen las derivadas parciales anteriores en (7.4), se encuentra que

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \right) B + \frac{1}{2}\sigma^2 (T - t)^2 B - r_t B - h_t (T - t) B = 0.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = h_t(T - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)^2.$$

Después de resolver la ecuación diferencial ordinaria anterior se obtiene

$$A(t, T) = - \int_t^T h_s(T - s)ds + \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^3. \quad (7.6)$$

En virtud de (7.5),  $A(t, T) - r_t(T - t) = \ln B(t, T)$ , de donde se desprende que

$$\int_t^T h_s(T - s)ds = - \ln B(t, T) + \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^3 - r_t(T - t), \quad (7.7)$$

o en forma alternativa, en términos de la curva de rendimiento  $R(t, T)$ ,

$$R(t, T)(T - t) = \int_t^T h_s(T - s)ds - \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^3 + r_t(T - t). \quad (7.8)$$

Es decir, si se conociera  $h_t$  se podría determinar  $R(t, T)$ . En particular si  $h_t$  fuera constante,  $h_t = \bar{h}$  para toda  $t$ , entonces

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T - t} \left[ \bar{h} \frac{1}{2}(T - t)^2 - \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^3 + r_t(T - t) \right] \\ &= \frac{1}{2}\bar{h}(T - t) - \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^2 + r_t. \end{aligned}$$

Sin embargo, observe que en este caso,

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, T) = \frac{1}{2}\bar{h} - \frac{1}{3}\sigma^2(T - t).$$

Lo anterior implica que conforme  $T$  aumenta, la pendiente de la curva de rendimiento se tornará negativa, lo cual puede producir eventualmente valores negativos de  $R(t, T)$ .

### 7.3 Ajuste de la curva de rendimiento con valores actuales de mercado

Si se supone que  $\sigma$  ha sido estimada por algún método de inferencia estadística, se elegirá un función,  $h_s^{(0)}$ , de tal manera que los precios de mercado disponibles hoy, en el tiempo  $t = 0$ , sean consistentes con la tasa con  $R(0, T)$ . Es decir, busquemos  $h_s^{(0)}$ , tal que se satisfaga (7.7), es decir,

$$\int_0^T h_s^{(0)}(T - s)ds = - \ln B(0, T) + \frac{1}{6}\sigma^2 T^3 - r_0 T, \quad (7.9)$$

la cual es una ecuación integral en  $h_s^{(0)}$ . Una forma de resolver esta ecuación integral es calculando sus dos primeras derivadas. Para derivar (7.9) con respecto de  $T$ , denote el integrando de (7.9), por un momento, como

$$g(T, s) = h_s^{(0)}(T - s).$$

En este caso, la Regla de Leibnitz conduce a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T} \int_0^T g(T, s) ds &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} g(T, s) ds + g(T, T) \frac{\partial T}{\partial T} - g(T, 0) \frac{\partial 0}{\partial T} \\ &= \int_0^T h_s^{(0)} ds.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de (7.9), está dada por

$$\int_0^T h_s^{(0)} ds = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + \frac{1}{2} \sigma^2 T^2 - r_0. \quad (7.10)$$

Si se deriva de nuevo (7.10) se encuentra que

$$h_T^{(0)} = -\frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) + \sigma^2 T,$$

o bien,  $h_T^{(0)}$  se puede escribir en términos de la tasa forward instantánea

$$h_T^{(0)} = \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) + \sigma^2 T. \quad (7.11)$$

Lo anterior significa que la tasa corta se moverá, en promedio, en la dirección de la pendiente de la tasa forward.

Para encontrar  $A(t, T)$ , se escribe (7.12) empleando  $t$  en lugar de  $T$ , es decir,

$$h_t^{(0)} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln B(0, t) + \sigma^2 t$$

ó

$$h_t^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sigma^2 t. \quad (7.12)$$

Note que si la pendiente de la tasa forward es grande y positiva, entonces  $h_t^{(0)}$  es grande y positiva. Mientras que si la pendiente de la tasa forward es negativa y grande en valor absoluto, entonces  $h_t^{(0)}$  podría ser negativa. Por lo tanto, el término integral en la última igualdad de (7.9) satisface

$$\begin{aligned}& \int_t^T h_s^{(0)} (T - s) ds \\ &= \int_t^T \left( -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) + \sigma^2 s \right) (T - s) ds \\ &= -\int_t^T (T - s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds + \sigma^2 \int_t^T s (T - s) ds \\ &= -T \int_t^T \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds + \int_t^T s \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds + \frac{\sigma^2}{6} (T^3 - 3Tt^2 + 2t^3) ds.\end{aligned} \quad (7.13)$$

La segunda integral puede resolverse mediante integración por partes, como sigue:

$$\begin{aligned}\int_t^T s \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds &= s \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) \Big|_t^T - \int_t^T \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\ &= T \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) - t \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \ln B(0, T) + \ln B(0, t).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int_t^T h_s^{(0)}(T-s) ds &= -T \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + T \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \\ &\quad + T \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) - t \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) \\ &= (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right).\end{aligned}\tag{7.14}$$

Si se sustituye (7.14) en (7.6), se obtiene que

$$A(t, T) = \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{6} (T^3 - 3Tt^2 + 2t^3) + \frac{\sigma^2}{6} (T-t)^3.$$

En conclusión,

$$A(t, T) = \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{2} t(T-t)^2.\tag{7.15}$$

## 7.4 Calibración de la curva de rendimiento

Como se mencionó antes, en el modelo de Ho y Lee la estructura de tasas de interés, se elige  $h_t^{(0)}$ , de tal manera que los precios de mercado de un bono cupón cero sean iguales a los precios teóricos en cada instante. Si la calibración del modelo se lleva a cabo en cada instante, se puede escribir, con base en (7.8),

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left( \int_t^T h_s^{(0)}(T-s) ds - \frac{1}{6} \sigma^2 (T-t)^3 + r_t(T-t) \right).$$

Es decir,

$$R(t, T) = \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{1}{6} \sigma^2 (T-t)^2 + r_t,\tag{7.16}$$

o en términos de la tasa forward

$$R(t, T) = -f(0, t) - \frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{1}{6} \sigma^2 (T-t)^2 + r_t.\tag{7.17}$$

En la práctica, se utiliza len (7.16) o (7.17) la aproximación

$$-f(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \approx \frac{\ln B(0, t + \Delta t) - \ln B(0, t)}{\Delta t}$$

con  $\Delta t$  pequeña. Las cantidades que se refieren al tiempo cero, a saber  $B(0, t)$ ,  $B(0, t + \Delta t)$  y  $B(0, T)$  representan precios en un periodo anterior, ayer o hace unas horas, las cantidades referenciadas al tiempo  $t$  se consideran disponibles en el presente. Por ejemplo, con los precios de mercado hasta el medio día, el tiempo cero, y con la tasa corta de la una de la tarde, el tiempo  $t$ , se genera la curva de rendimiento a todos los plazos  $T - t$ . Si al día siguiente corremos el mismo proceso la forma funcional de  $h_t^{(0)}$  no cambia, aun cuando en el mercado se hayan presentado cambios, lo cual podría verse como una inconsistencia del modelo. Sin embargo, en presencia de cambios  $h_t^{(0)}$  puede cambiar de signo y el parámetro de volatilidad tiene que reestimarse. Este método de calibración es muy popular y no se puede pedir más cuando se lidia con modelos con un solo factor de incertidumbre y sin reversión a la media, es decir, con un solo Browniano.

## 7.5 Recuperación de la tasa corta a partir de la curva de rendimiento

Observe que si  $v = T - t$ , entonces

$$R(t, t + v) = -f(0, t) - \frac{1}{v} \ln \left( \frac{B(0, t + v)}{B(0, t)} \right) - \frac{1}{6} \sigma^2 v^2 + r_t,$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} R(t, t + v) &= -f(0, t) - \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln B(0, t + v) - \ln B(0, t)}{v} + r_t \\ &= -f(0, t) - \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) + r_t \\ &= -f(0, t) + f(0, t) + r_t \\ &= r_t, \end{aligned}$$

que era de esperarse.

## 7.6 Precio del bono cupón cero

A partir de (7.5) se sigue que

$$B(t, T) = \exp \left\{ \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - (T - t) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{2} t (T - t)^2 - r_t (T - t) \right\}. \quad (7.18)$$

En la práctica, se puede emplear la aproximación

$$B(t, T) = \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) \left( \frac{B(0, t + \Delta t)}{B(0, t)} \right)^{-\frac{T-t}{\Delta t}} \exp \left\{ -(T - t) \left( \frac{\sigma^2}{2} t (T - t) - r_t \right) \right\}.$$

Las mismas observaciones de (7.18) son válidas

## 7.7 Tasa forward

Considere la identidad

$$\int_t^T f(t, s) ds = -\ln B(t, T) = R(t, T)(T - t).$$

Después de derivar la expresión anterior con respecto de  $T$ , se sigue que

$$\begin{aligned} f(t, T) &= R(t, T) + (T - t) \frac{\partial}{\partial T} R(t, T) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{1}{T - t} \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^2 + r_t \\ &\quad + \frac{1}{T - t} \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{1}{3} \sigma^2 (T - t)^2 \\ &= -\frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^2 - \frac{1}{3} \sigma^2 (T - t)^2 + r_t \\ &= -\frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)^2 + r_t. \end{aligned}$$

En virtud de (7.16), se cumple ahora

$$\begin{aligned} f(t, T) &= \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{1}{T - t} \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^2 + r_t \\ h_t &= \frac{\partial}{\partial T} f(0, t) + \sigma^2 t, \end{aligned} \tag{7.19}$$

de tal forma que

$$dr_t = \left( \frac{\partial}{\partial T} f(0, t) + \sigma^2 t \right) dt + \sigma dW_t.$$

De la misma manera, la curva de rendimiento satisface

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{1}{T - t} \int_t^T \left( \frac{\partial}{\partial T} f(0, s) + \sigma^2 s \right) (T - s) ds - \frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^2 + r_t \\ &= f(0, t) - \frac{1}{T - t} \int_t^T f(0, s) ds + \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t)^2 + r_t. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Observe que

$$B(0, t : T) = e^{-\int_0^t f(0, s) ds} = \mathbb{E} \left\{ e^{-\int_0^t r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right\}. \tag{7.21}$$

Dado que  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  y  $\mathbb{E}[e^X] = e^{\mathbb{E}[X] + \frac{1}{2} \text{Var}[X]}$ , si denotamos por  $I(0, t) = \int_0^t r_s ds$ , entonces el valor esperado de (7.1) satisface

$$\mathbb{E} \left\{ e^{-I(0, t)} \mid \mathcal{F}_t \right\} = e^{-\mathbb{E}[I(0, t)] + \frac{1}{2} \text{Var}[I(0, t)]}.$$

Por lo tanto, de (7.21) se tiene que

$$-\int_0^t f(0, s) \, ds = -E[I(0, t)] + \frac{1}{2}\text{Var}[I(0, t)]$$

Equivalentemente

$$\int_0^t f(0, s) \, ds = \int_0^t \eta_s \, ds - \frac{1}{2}\sigma^2 t,$$

Es decir,

$$\eta_t = f(0, t) + \frac{1}{2}\sigma^2$$

En consecuencia,

$$r_t = r_0 + \int_0^t (f(0, s) + \frac{1}{2}\sigma^2) \, ds + \sigma \int_0^t \, dW_s$$

Este modelo fue el primero de no arbitraje para la estructura de tasas de interés. Así, para una elección particular de la función  $\eta_t$ , se tienen como resultado precios teóricos de un bono cupón cero iguales a los precios de mercado en  $t$ . Esta técnica es también conocida como ajuste de la tasa de rendimiento a precios actuales. El modelo supone que existen bonos para todos los vencimientos y que los precios son dos veces diferenciables con respecto al vencimiento.

## 8. El modelo de Hull y White

Existen en la literatura otros modelos que se pueden calibrar con precios actuales, siendo el caso de Ho y Lee el más sencillo. La mayoría de los modelos con un factor de incertidumbre permiten calibrar la curva de rendimiento con los precios de mercado actuales. Si el modelo no es del todo tratable, es decir, el modelo no proporciona una fórmula explícita para los precios de los bonos cupón cero, entonces se recurre a los métodos numéricos a fin de encontrar soluciones aproximadas.

En el modelo de Vasicek, la dinámica de la tasa corta es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (8.1)$$

Hull y White extienden este modelo para incluir un parámetro dependiente del tiempo, específicamente se supone que  $b$  es dependiente del tiempo, lo cual se denotará mediante  $b_t$ , de esta manera

$$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (8.2)$$

Si se supone que  $a$  y  $\sigma$  han sido estimadas por algún método estadístico, se desea ahora seleccionar  $b_t^{(0)}$ , en el tiempo  $t = 0$ , de tal manera que los precios de mercado y los teóricos coincidan.

### 8.1 Tasa corta neutral al riesgo

Se supone que el precio de bono cupón cero,  $B(t, T)$ , satisface la ecuación diferencial parcial de segundo orden, lineal y parabólica:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(b_t - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0, \quad (8.3)$$

con la condición final  $B(T, T) = 1$ . Dado que la ecuación anterior no tiene derivadas parciales cruzadas, se supone una solución en variables separables de la forma:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}. \quad (8.4)$$

Claramente, en este caso, se cumple que  $A(T, T) = 0$  y  $D(T, T) = 0$ , ya que el valor nominal del bono en el tiempo  $T$ , está dado por

$$B(T, T) = 1.$$

Al diferenciar  $B(t, T)$  en (8.4) se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \left( \frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B, \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -D B, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= D^2 B. \end{aligned}$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (8.3), se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - a(b_t - r_t)D - r_t = 0. \quad (8.5)$$

Dado que  $A$  y  $D$  son funciones de  $t$  y  $T$ , si se deriva (8.5) con respecto a  $r_t$  se obtiene

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 = 0. \quad (8.6)$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1.$$

La solución de la ecuación diferencial anterior con condición final  $D(T, T) = 0$  está dada por

$$\begin{aligned} D(t, T) &= D(T, T)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= -e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Por lo tanto, al sustituir  $D(t, T)$  en (8.5) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A}{\partial t} - r_t(aD - 1) + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + a(r_t - b_t)D - r_t \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - ab_t D. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = ab_t D - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2,$$

o bien,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b_t \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \int_T^t b_s \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^2} \int_T^t e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_T^t e^{-2a(T-s)} ds \\ &= - \int_t^T b_s \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-2a(T-t)} - 1\right) \\ &= - \int_t^T b_s \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - t + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Si se supone que  $a$  y  $\sigma$  han sido estimados por algún método de inferencia estadística y se desea calibrar  $A(0, T)$  con la curva de rendimiento actual, es decir, se desea encontrar  $b_T^{(0)}$  tal que

$$A(0, T) = - \int_0^T b_s^{(0)} \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT} - \frac{3}{2a}\right).$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T b_s^{(0)} \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT} - \frac{3}{2a}\right) \\ &= \ln B(0, T) + r_0 D(0, T) \\ &= \ln B(0, T) + r_0 \left(\frac{1 - e^{-aT}}{a}\right), \end{aligned} \tag{8.9}$$

la cual es una ecuación integral en  $b_t^{(0)}$ . Una forma de resolver esta ecuación integral es calculando sus dos primeras derivadas. Para derivar (8.9) con respecto de  $T$ , denote el integrando de (8.9), por un momento, como

$$g(T, s) = b_s^{(0)} \left(1 - e^{-a(T-s)}\right).$$

En este caso, la Regla de Leibnitz conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T g(T, s) ds &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} g(T, s) ds \\ &= a \int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de (8.9) está dada por:

$$-a \int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - 2e^{-aT} + e^{-2aT}) = \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + r_0 a e^{-aT}. \tag{8.10}$$

ó

$$\int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-aT})^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) - r_0 e^{-aT}. \tag{8.11}$$

Con el propósito de derivar nuevamente (8.10) con respecto de  $T$ , se define ahora

$$G(T, s) = b_s^{(0)} e^{-a(T-s)},$$

y en este caso la regla de Leibnitz conduce a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T G(T, s) ds &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} G(T, s) ds + G(T, T) \frac{\partial T}{\partial T} - G(T, 0) \frac{\partial 0}{\partial T} \\ &= -a \int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds + b_T^{(0)}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$a^2 \int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds - ab_T^{(0)} + \frac{\sigma^2}{a} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) - r_0 a^2 e^{-aT}. \quad (8.12)$$

ó

$$\int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds = \frac{1}{a} b_T^{(0)} - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) + r_0 e^{-aT}. \quad (8.13)$$

Después de igualar (8.13) con (8.11) se cumple que

$$b_T^{(0)} - \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) = \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T),$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} b_T^{(0)} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-aT}) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 \\ &= -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT}) \\ &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) + f(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT}). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Para encontrar  $A(t, T)$  a partir de (8.8), se escribe (8.14) empleando  $t$  en lugar de  $T$ , es decir,

$$b_t^{(0)} = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln B(0, t) - \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2at}).$$

Por lo tanto, el término integral en la última igualdad de (8.8) satisface

$$\begin{aligned} &\int_t^T b_s^{(0)} (1 - e^{-a(T-s)}) ds \\ &= \int_t^T \left( -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) - \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2as}) \right) (1 - e^{-a(T-s)}) ds \\ &= -\frac{1}{a} \int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds - \int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (1 - e^{-2as}) (1 - e^{-a(T-s)}) ds. \end{aligned} \quad (8.15)$$

La primera integral de la última igualdad de (8.15) se calcula mediante integración por partes

$$\begin{aligned} \int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds &= -\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \\ &\quad + a \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds. \end{aligned} \quad (8.16)$$

La segunda integral en (8.15) satisface

$$\begin{aligned}
& \int_t^T \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\
&= \int_t^T \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\
&= \ln B(0, T) - \ln B(0, t) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\
&= \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Finalmente, la tercera integral está dada por

$$\begin{aligned}
& \int_t^T (1 - e^{-2as}) (1 - e^{-a(T-s)}) ds \\
&= \int_t^T (1 - e^{-2as} - e^{-a(T-s)} + e^{-a(T+s)}) ds \\
&= T - t - \frac{1}{2a} (e^{-2at} - e^{-2aT}) - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{1}{a} (e^{-a(T+t)} - e^{-2aT}) \\
&= T - t + \left( -\frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a} \right).
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Después de sustituir (8.16), (8.17) y (8.18) en (8.15), se sigue que

$$\begin{aligned}
& \int_t^T b_s^{(0)} (1 - e^{-a(T-s)}) ds \\
&= \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\
&\quad - \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) + \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T - t - \frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a} \right).
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= - \int_t^T b_s^{(0)} \left( 1 - e^{-a(T-s)} \right) ds \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \\
&= \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T - t - \frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{a} \right) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T+t)} - \frac{3}{2a} \right) \\
&= \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left( -e^{-2aT} - e^{-2at} + 1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} + 2e^{-a(T+t)} \right).
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$A(t, T) = \ln \left( \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - D(t, T) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1). \quad (8.20)$$

Así pues, una vez determinadas las funciones  $D(t, T)$  y  $A(t, T)$  en (8.7) y (8.20), respectivamente, la curva de rendimiento se calcula mediante

$$R(t, T) = \frac{r_t A(t, T) - D(t, T)}{T - t},$$

lo que concluye esta sección.

## 9. Modelo Longstaff

Existe en la literatura una clase importante de procesos con reversión a la media para el modelado del comportamiento de la tasa corta. Dicha clase está representada por la ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a_t(\nu - r_t^\alpha)dt + \sigma r_t^\beta dW_t \quad (9.1)$$

en donde  $\nu$  y  $\sigma$  son constantes positivas y  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano estándar. El término aleatorio en la ecuación (9.1) tiene varianza  $\sigma^2 r_t^{2\beta}$  por unidad de tiempo, donde  $\beta \geq 0$ .

Los casos en que  $a_t \equiv a$ ,  $\alpha = 1$  y  $\beta \in \{0, \frac{1}{2}\}$  son de particular interés ya que son de equilibrio general que pueden tratarse analíticamente. El modelo de Vasicek se obtiene cuando  $\beta = 0$  y el modelo de Cox, Ingersoll y Ross cuando  $\beta = \frac{1}{2}$ . El modelo de Longstaff se obtiene cuando  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ,  $\nu = \sigma^2/4a$  y  $a_t \equiv a$ . De esta forma

$$dr_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (9.2)$$

Modelo	Parámetros	$\nu, a_t$	Proceso
Merton (1970)	$\alpha = 0 \quad \beta = 0$	$\mu + 1$ $a = 1$	$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t$ $\mu, \sigma$ son ctes.
Vasicek (1977)	$\alpha = 1 \quad \beta = 0$	$b, a$	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$ $a, b, \sigma$ son ctes.
CIR (1985)	$\alpha = 1 \quad \beta = \frac{1}{2}$	$b, a$	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$ $a, b, \sigma$ son ctes.
Ho y Lee (1986)	$\alpha = 0 \quad \beta = 0$	$2, h_t$	$dr_t = h_t dt + \sigma dW_t$ $\sigma$ es constante
Hull y White (1990)	$\alpha = 1 \quad \beta = 0$	$b_t, a$	$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma dW_t$ $b_t, \sigma$ son función del tiempo
Longstaff (1989)	$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2}$	$b, a$	$dr_t = a(b - \sqrt{r_t})dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$ $a, b, \sigma$ son ctes.

Tabla 9.1 Resumen de casos particulares de la ecuación (9.1).

El modelo de Longstaff también es de equilibrio general y proporciona una solución analítica. Este modelo se le conoce también en la literatura como el modelo de doble raíz. Es importante destacar que modelos con valores  $\beta$  distintos de 0 y  $\frac{1}{2}$  no son muy populares en la literatura debido a su complejidad. La tabla 9.1 presenta un resumen de los modelos de tasas que se pueden derivar a partir de la ecuación (9.1).

## 9.1 Solución de la ecuación diferencial parcial de Longstaff

Si  $r_t$  es la tasa corta neutral al riesgo, es decir, el premio al riesgo es cero, entonces el precio de un bono cupón cero,  $B(t, T)$ , que se coloca en  $t$  y que paga una unidad monetaria al vencimiento  $T$ , satisface la ecuación diferencial parcial de segundo orden y parabólica:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \quad (9.3)$$

Se propone una solución de (9.3) en términos de variables separables como sigue:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) + r_t D(t, T) + C(t, T)\sqrt{r_t}}. \quad (9.4)$$

Claramente,  $A(T, T) = D(T, T) = C(T, T) = 0$  ya que el valor nominal del bono está dado por

$$B(T, T) = e^{A(T, T) + r_T D(T, T) + C(T, T)\sqrt{r_T}} = 1.$$

Después de derivar parcialmente a  $B$  con respecto de  $t$  y  $r_t$  se encuentra que:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = B \left( \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \sqrt{r_t} \frac{\partial C}{\partial t} \right), \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = B \left( D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}} \right) \quad (9.6)$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = B \left[ \left( -\frac{C}{4\sqrt{r_t} r_t} \right) + \left( D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}} \right)^2 \right]. \quad (9.7)$$

Si se sustituyen las expresiones (9.5), (9.6) y (9.7) en la ecuación (9.3) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \sqrt{r_t} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\sigma^2 C}{8\sqrt{r_t}} + \frac{\sigma^2 r_t}{2} \left( D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}} \right)^2 \\ & + \left( \frac{\sigma^2}{4} - a\sqrt{r_t} \right) \left( D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}} \right) - r_t = 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Después de desarrollar la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \sqrt{r_t} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\sigma^2 C}{8\sqrt{r_t}} + \frac{\sigma^2 r_t}{2} D^2 + \frac{\sigma^2 \sqrt{r_t}}{2} DC + \frac{\sigma^2}{8} C^2 + \frac{\sigma^2}{4} D \\ & + \frac{\sigma^2 C}{8\sqrt{r_t}} - aD\sqrt{r_t} - \frac{aC}{2} - r_t = 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \left( \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\sigma^2 D^2}{2} - 1 \right) + \sqrt{r_t} \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \left( \frac{C\sigma^2}{2} - a \right) D \right] \\ & + \left( \frac{C\sigma^2}{8} - \frac{a}{2} \right) C + \frac{D\sigma^2}{4} = 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Si se deriva con respecto de  $r_t$ , se tiene que

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\sigma^2 D^2}{2} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{r_t}} \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \left( \frac{C\sigma^2}{2} - a \right) D \right] = 0. \quad (9.10)$$

A fin de que (9.10) se cumpla para toda  $r_t$  es necesario que se satisfaga

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 1 - \frac{\sigma^2 D^2}{2} \quad (9.11)$$

junto con

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left( a - \frac{C\sigma^2}{2} \right) D. \quad (9.12)$$

La ecuación diferencial ordinaria (9.11) es del tipo de Riccati. Retomemos la ecuación para obtener su solución de manera analítica, esto es

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 1 - \frac{\sigma^2 D^2}{2}, \quad (9.13)$$

$$\frac{\partial D(t, T)}{\partial t} = - \left( \frac{\sigma^2 D^2(t, T)}{2} - 1 \right).$$

De la ecuación (13), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{D(T, T)}^{D(t, T)} \frac{dU(s, T)}{\frac{1}{2}\sigma^2 U^2(s, T) - 1} &= - \int_T^t ds \\ &= -(t - T). \end{aligned} \quad (9.14)$$

El lado izquierdo de la ecuación (9.14), se puede reescribir como

$$\int_0^{D(t, T)} \frac{dU}{\frac{1}{2}\sigma^2 U^2 - 1} = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{D(t, T)} \frac{dU}{U^2 - (2/\sigma^2)}. \quad (9.15)$$

La integral que aparece en (9.15) se calcula mediante integración por fracciones parciales, esto es,

$$\int_0^{D(t, T)} \frac{dU}{U^2 - (2/\sigma^2)} = \int_0^{D(t, T)} \frac{dU}{(U + (\sqrt{2}/\sigma))(U - (\sqrt{2}/\sigma))}. \quad (9.16)$$

Note que el integrando en (9.16) se puede reescribir como

$$\frac{1}{(U + (\sqrt{2}/\sigma))(U - (\sqrt{2}/\sigma))} = \frac{A_0}{U + \sqrt{2}/\sigma} + \frac{B_0}{U - \sqrt{2}/\sigma}.$$

De lo anterior, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$A_0 + B_0 = 0$$

y

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma} B_0 - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} A_0 = 1.$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$A_0 = -\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \quad (9.17)$$

y

$$B_0 = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \quad (9.18)$$

Al sustituir (9.17) y (9.18) en (9.16), se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{(U^2 - (2/\sigma^2))} &= \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{(U + (\sqrt{2}/\sigma))(U - (\sqrt{2}/\sigma))} \\ &= -\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{U + (\sqrt{2}/\sigma)} + \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{U - (\sqrt{2}/\sigma)} \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \left[ -\ln |U + (\sqrt{2}/\sigma)|_0^{D(t,T)} \right. \\ &\quad \left. + \ln |U - (\sqrt{2}/\sigma)|_0^{D(t,T)} \right] \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{U - (\sqrt{2}/\sigma)}{U + (\sqrt{2}/\sigma)} \right|_0^{D(t,T)} \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \left\{ \ln \left| \frac{D(t,T) - (\sqrt{2}/\sigma)}{D(t,T) + (\sqrt{2}/\sigma)} \right| - \ln \left| \frac{0 - (\sqrt{2}/\sigma)}{0 + (\sqrt{2}/\sigma)} \right| \right\} \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{D(t,T) - (\sqrt{2}/\sigma)}{D(t,T) + (\sqrt{2}/\sigma)} \right|. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Note que en la ecuación (9.19) se ha considerado que  $D(T, T) = 0$  y que  $\ln |-1| = 0$ . Si se

sustituye la ecuación (9.19) en la ecuación (9.15) y (9.14) , se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{D(T,T)}^{D(t,T)} \frac{dU}{\frac{1}{2}\sigma^2 U^2 - 1} &= \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{\frac{1}{2}\sigma^2 \left( U^2 - \left( \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2} \right) \right)} \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{\left( U^2 - \left( \frac{2}{\sigma^2} \right) \right)} \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{D(t,T) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}{D(t,T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \ln \left( \frac{D(t,T) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}{D(t,T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \right) = -(t - T),
\end{aligned} \tag{9.20}$$

donde se ha supuesto que la cantidad que aparece dentro del valor absoluto es positiva. Por lo tanto,

$$\ln \left( \frac{D(t,T) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}{D(t,T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \right) = \sqrt{2}\sigma(T - t). \tag{9.21}$$

De la ecuación (9.21), se obtiene tiene

$$D(t,T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left[ \frac{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \tag{9.22}$$

Equivalentemente,

$$D(t,T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left[ 1 + \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \tag{9.23}$$

La función  $D(t,T)$  satisface la ecuación diferencial (9.11). Sin embargo, observe que (9.23) no cumple la condición final  $D(T,T) = 0$ . Por lo tanto, se retoma la ecuación (9.20) suponiendo ahora que el argumento del valor absoluto es una cantidad negativa, lo que conduce a

$$\ln \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sigma} - D(t,T)}{D(t,T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \right) = \sqrt{2}\sigma(T - t). \tag{9.24}$$

Al despejar  $D(t,T)$ , se tiene

$$D(t,T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left[ \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \tag{9.25}$$

ó

$$D(t,T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left[ 1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \tag{9.26}$$

Esta función satisface la ecuación diferencial (9.11) y cumple la condición  $D(T, T) = 0$ . La solución obtenida,  $D(t, T)$ , se sustituye en la ecuación diferencial parcial (9.12), lo cual lleva a

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= \left(a - \frac{C\sigma^2}{2}\right) D, \\ &= \left(a - \frac{C\sigma^2}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left[ \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right].\end{aligned}\quad (9.27)$$

La ecuación diferencial (9.27) es de variables separables, así

$$- \int_{C(T,T)}^{C(t,T)} \frac{dU(s, T)}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right) - a} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \left[ \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right] ds. \quad (9.28)$$

Al resolver la integral del lado izquierdo de la ecuación (9.28), se tiene que

$$\begin{aligned}- \int_0^{C(t,T)} \frac{dU}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right) - a} &= - \int_0^{C(t,T)} \frac{dU}{\frac{\sigma^2}{2} \left[U - \frac{2a}{\sigma^2}\right]} \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \int_0^{C(t,T)} \frac{dU}{U - \frac{2a}{\sigma^2}} \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \left[ \ln \left| U - \frac{2a}{\sigma^2} \right| \right]_0^{C(t,T)} \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \left[ \ln \left| C(t, T) - \frac{2a}{\sigma^2} \right| - \ln \left| 0 - \frac{2a}{\sigma^2} \right| \right] \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \ln \left| \frac{\frac{2a}{\sigma^2} - C(t, T)}{2a/\sigma^2} \right| \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \ln \left| \frac{2a - \sigma^2 C(t, T)}{2a} \right| \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \ln \left( \frac{2a - \sigma^2 C(t, T)}{2a} \right)^{-1},\end{aligned}$$

donde se se ha tomado en cuenta que  $C(T, T) = 0$  y se ha supuesto que  $C(t, T) < 2a/\sigma^2$ . Por lo tanto,

$$- \int_0^{C(t,T)} \frac{dU}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right) - a} = \frac{2}{\sigma^2} \ln \left( \frac{2a}{2a - \sigma^2 C(t, T)} \right). \quad (9.29)$$

Considere ahora el lado derecho de (9.28), y defina el cambio de variable  $U = 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}$ , entonces

$$\begin{aligned}dU &= -\sqrt{2}\sigma e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)} ds \\ &= -\sqrt{2}\sigma(U - 1) ds,\end{aligned}$$

así

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \left[ \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right] ds = \frac{1}{\sigma^2} \int_T^t \frac{U - 2}{U(U - 1)} dU. \quad (9.30)$$

El lado derecho de la ecuación (9.30) se resuelve por fracciones parciales, esto es, se desea determinar  $A_1$  y  $B_1$  tales que

$$\frac{U-2}{U(U-1)} = \frac{A_1}{U} + \frac{B_1}{U-1} = \frac{A_1(u-1) + B_1U}{U(U-1)}.$$

Es decir,

$$A_1 + B_1 = 1$$

y

$$A_1 = 2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \int_T^t \frac{U-2}{U(U-1)} dU &= \frac{1}{\sigma^2} \left[ \int_T^t \frac{A_1}{U} dU + \int_T^t \frac{B_1}{U-1} dU \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[ 2 \ln \left| 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)} \right|_T^t - \ln \left| 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)} - 1 \right|_T^t \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[ 2 \left( \ln \left| 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right| - \ln 2 \right) - \ln \left| e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)} \right|_T^t \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[ \ln \left[ \frac{\left( 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)^2}{4} \right] - \ln e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{\left( 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)^2}{4e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \end{aligned} \tag{9.31}$$

Si, por un lado, se sustituye (9.31) en (9.30) y, por otro lado, se sustituyen (9.29) y (9.30) en (9.28), se tiene que

$$\begin{aligned} - \int_{C(t,T)}^{C(t,T)} \frac{dU}{\left( \frac{U\sigma^2}{2} \right) - a} &= \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \left[ \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right] ds \\ \frac{2}{\sigma^2} \ln \left( \frac{2a}{2a - \sigma^2 C(t,T)} \right) &= \frac{1}{\sigma^2} \ln \left[ \frac{\left( 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)^2}{4e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Al despejar  $C(t, T)$  de la ecuación anterior, se tiene que

$$C(t, T) = \frac{2a}{\sigma^2} \left[ \frac{\left( 1 - e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma(T-t)} \right)^2}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \tag{9.33}$$

Observe que  $C(t, T) < 2a/\sigma^2$  y que si  $t = T$ , entonces  $C(T, T) = 0$ . Se puede verificar, de manera sencilla, que (9.25) y (9.33) cumplen con (9.12).

Ahora bien, si se sustituyen (9.11), (9.12), (9.26) y (9.33) en (9.9), se obtiene que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{a^2 \left(1 - e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}\right)^4}{2\sigma^2 \left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)^2} - \frac{a^2 \left(1 - e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}\right)^2}{\sigma^2 \left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)} \\ & + \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right] = 0. \end{aligned}$$

La expresi3n anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{a^2}{2\sigma^2} \left( \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right)^2 - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \quad (9.34)$$

Por lo tanto,

$$A(t, T) = \frac{a^2}{2\sigma^2} \int_T^t \left( \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right)^2 ds - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \int_T^t \left[ 1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right] ds. \quad (9.35)$$

Para calcular la primera integral, del lado derecho de la ecuaci3n anterior, se define el siguiente cambio de variable sea  $u = 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}$ , de donde  $du = -\sqrt{2}\sigma(u - 1)ds = \sqrt{2}\sigma(1 - u)ds$ . En consecuencia,

$$\frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \int_T^t \frac{(2 - u)^2}{u^2(1 - u)} du = \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \int_T^t \frac{(4 - 4u + u^2)}{u^2(1 - u)} du. \quad (9.36)$$

La integral, del lado derecho de (9.36), se calcula por fracciones parciales. Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{(4 - 4u + u^2)}{u^2(1 - u)} &= \frac{A_2}{u^2} + \frac{B_2}{u} + \frac{C_2}{1 - u} \\ &= \frac{A_2 + u(B_2 - A_2) + u^2(C_2 - B_2)}{u^2(1 - u)} \end{aligned}$$

La soluci3n del sistema generado es  $A_2 = 4$ ,  $B_2 = 0$ , y  $C_2 = 1$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \int_T^t \frac{(4 - 4u + u^2)}{u^2(1 - u)} du &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \left[ \int_T^t \frac{4}{u^2} du + \int_T^t \frac{1}{1 - u} du \right] \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \left[ \int_T^t \frac{4}{u^2} du - \int_T^t \frac{1}{u - 1} du \right] \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \left[ -4 \left( \frac{1}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right) \Big|_T^t \right. \\ & \quad \left. - \ln \left( e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)} \right) \Big|_T^t \right] \\ &= -\frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3 \left( 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)} + \frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3} - \frac{a^2(T - t)}{2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

A continuación se calcula la segunda integral que aparece en (9.35), es decir,

$$\begin{aligned}
-\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \int_T^t \left[ 1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right] ds &= -\frac{\sigma^2}{4} \left[ \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \left[ 1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right] ds \right] \\
&= -\frac{\sigma^2}{4} \left[ \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \left( \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right) ds \right] \\
&= -\frac{1}{4} \ln \left[ \frac{\left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)^2}{4e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right).
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Note que la integral que aparece en la segunda igualdad de (9.38), ya fue resuelta en (9.30). Por último, si se sustituyen las ecuaciones (9.37) y (9.38) en (9.35), se obtiene que

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right) + \frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3} - \frac{a^2(T-t)}{2\sigma^2} \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3 \left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)}.
\end{aligned} \tag{9.39}$$

La expresión anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right) + \frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3} + \left( \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} - \frac{a^2}{2\sigma^2} \right) (T-t) \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3 \left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}\right)}.
\end{aligned} \tag{9.40}$$

Claramente, si  $t = T$ , entonces  $A(T, T) = 0$ .

### 9.3 Estructura de plazos del modelo de Longstaff

La estructura de plazos en este modelo está dada por:

$$R(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T - t} = \frac{-r_t D(t, T) - A(t, T) - C(t, T)\sqrt{r_t}}{T - t}. \quad (9.41)$$

Puede verificarse, fácilmente, que

$$R(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} - \frac{a^2}{2\sigma^2}. \quad (9.42)$$

### 9.4 Estimación de parámetros

Recuerde que la ecuación diferencial estocástica del comportamiento de la tasa corta está representada por:

$$dr_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (9.43)$$

Considere el cambio de variable  $X_t = 2\sqrt{r_t}$ . Se calculan las parciales de primero y segundo orden de  $X_t$  con respecto a  $r_t$ . Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_t}{\partial r_t} &= \frac{1}{\sqrt{r_t}} = \frac{2}{X_t}, \\ \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} &= -\frac{1}{2r_t\sqrt{r_t}} = -\frac{1}{r_t X_t} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = 0. \quad (9.44)$$

El lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned} dX_t &= \left( \frac{\partial X_t}{\partial t} + \frac{\partial X_t}{\partial r_t} \left( \frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma\sqrt{r_t} \frac{\partial X_t}{\partial r_t} dW_t \\ &= \left( \frac{2}{X_t} \left( \frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \left( \frac{-1}{r_t X_t} \right) \right) dt + \sigma \frac{X_t}{2} \frac{2}{X_t} dW_t \\ &= \left( \frac{1}{2X_t}\sigma^2 - \frac{2a\sqrt{r_t}}{X_t} - \frac{1}{2X_t}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \\ &= -adt + \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Por lo tanto

$$X_t - X_{t-1} = -a + u_t \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

donde  $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Por lo tanto,

$$E[X_t - X_{t-1}] = -a \quad (9.46)$$

y

$$\text{Var}[X_t - X_{t-1}] = \sigma^2. \quad (9.47)$$

Así pues, Si  $Y_t = X_t - X_{t-1}$ , los estimadores de  $a$  y  $\sigma$  se obtienen a través de las siguientes ecuaciones

$$\sum_{t=1}^N Y_t = \hat{a} \quad \text{y} \quad \sqrt{\sum_{t=1}^N Y_t^2} = \hat{\sigma}.$$

## 10. Modelo Brennan y Schwartz de dos factores

En el modelo de Brennan de Schwartz la determinación de la curva de rendimiento no sólo considera la dinámica de la tasa de interés de plazo más corto disponible en el mercado, sino también el comportamiento la tasa de interés de plazo más largo con que se cuenta en el mercado. La dinámica de estas tasas se especifica a través de un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas.

### 10.1 Bonos “consol”

Un bono “consol” es una perpetuidad, es decir, es un instrumento de renta fija que paga periódicamente un cupón por siempre. En 1815, el gobierno británico colocó un monto considerable de bonos de consolación (“consol”) a fin de liquidar la deuda en que incurrió durante la guerra contra Napoleón. Estos bonos recibieron el nombre de bonos de consolación porque su propósito era dar consuelo a aquéllos con los que el gobierno británico tenía adeudos.

De esta manera, si un bono de consolación paga en cada instante un cupón  $c$  y se descuenta a una tasa  $b_t \equiv R(t, \infty)$ , entonces su precio  $C(t, b_t, \infty)$  al tiempo  $t$ , está dado por

$$C(t, b_t, \infty) = \int_t^{\infty} ce^{-b_t(s-t)} ds = \frac{c}{b_t}. \quad (10.1)$$

Alternativamente, un bono de consolación paga  $c\Delta s$  unidades monetarias durante  $\Delta s$  indefinidamente, así el precio  $C(t, b_t, \infty)$  está dado por

$$C(t, b_t, \infty) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_t^{\infty} e^{-b_t(s-t)}(c\Delta s), \quad (10.2)$$

donde el intervalo  $[0, \infty)$  se ha dividido en pequeños subintervalos de longitud  $\Delta s$ . Por último observe que

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = c,$$

ya que el bono de consolación paga  $c\Delta s$  unidades monetarias cada intervalo de longitud  $\Delta s$ .

### 10.2 Fundamentos del modelo de Brennan y Schwartz

A continuación se presenta una versión simplificada del modelo de Brennan y Schwartz. Se supone que la tasa corta,  $r_t \equiv R(t, t)$ , y la tasa larga,  $b_t \equiv R(t, \infty)$ , es decir, las tasas de interés de plazos más corto y más largo en el mercado, respectivamente, satisfacen el siguiente sistema de dos siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned} dr_t &= a(b - r_t)dt + r_t\sigma dW_t, \\ db_t &= b_t\alpha dt + b_t\beta dV_t. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Se supone también que los factores de riesgo se encuentran correlacionados entre sí, de tal manera que

$$dW_t dV_t = \rho dt.$$

Si  $B = B(r_t, b_t, t, T)$  denota el precio de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento  $T$ , el cual depende de  $r_t$  y  $b_t$ , se tiene que

$$\begin{aligned} dB = & \left[ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} a(b_t - r_t) + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \alpha \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \sigma^2 r_t^2 + \frac{\partial^2 B}{\partial b_t^2} b_t^2 \beta^2 + 2\rho r_t \sigma b_t \beta \frac{\partial^2 B}{\partial r_t \partial b_t} \right) \right] dt \\ & + \frac{\partial B}{\partial r_t} r_t \sigma dW_t + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \beta dV_t. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Si se denota la componente de tendencia de (10.4) por  $\nu_B$ , se sigue que

$$dB = \nu_B dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} r_t \sigma dW_t + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \beta dV_t. \quad (10.5)$$

### 10.3 Condición de no arbitraje

Con el propósito de caracterizar el equilibrio entre rendimientos de bonos de diferentes fechas de vencimiento, considere un portafolio con  $w_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , unidades de bonos  $B_i = B(r_t, b_t, t, T_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , con fechas de vencimiento  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . En este caso, el valor,  $\Pi_t$ , del portafolio está dado por:

$$\Pi_t = w_1 B_1 + w_2 B_2 + w_3 B_3, \quad (10.6)$$

y el cambio en su valor, por fluctuaciones propias del mercado, se calcula mediante

$$d\Pi_t = w_1 dB_1 + w_2 dB_2 + w_3 dB_3. \quad (10.7)$$

Si se sustituye el cambio en el precio de cada bono, se obtiene:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & w_1 \left( \nu_{B_1} dt + \frac{\partial B_1}{\partial r_t} r_t \sigma dW_t + \frac{\partial B_1}{\partial b_t} b_t \beta dV_t \right) \\ & + w_2 \left( \nu_{B_2} dt + \frac{\partial B_2}{\partial r_t} r_t \sigma dW_t + \frac{\partial B_2}{\partial b_t} b_t \beta dV_t \right) \\ & + w_3 \left( \nu_{B_3} dt + \frac{\partial B_3}{\partial r_t} r_t \sigma dW_t + \frac{\partial B_3}{\partial b_t} b_t \beta dV_t \right) \\ = & (w_1 \nu_{B_1} + w_2 \nu_{B_2} + w_3 \nu_{B_3}) dt \\ & + \left( w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} r_t \sigma + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} r_t \sigma + w_3 \frac{\partial B_3}{\partial r_t} r_t \sigma \right) dW_t \\ & + \left( w_1 \frac{\partial B_1}{\partial b_t} b_t \beta + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial b_t} b_t \beta + w_3 \frac{\partial B_3}{\partial b_t} b_t \beta \right) dV_t. \end{aligned} \quad (10.8)$$

La tasa de rendimiento del portafolio,  $d\Pi_t/\Pi_t$ , será libre de riesgo si las  $w_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , se seleccionan de tal manera que los coeficientes de los factores de riesgo  $dW_t$  y  $dV_t$  son cero, esto es, si se cumplen simultáneamente las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} r_t \sigma + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} r_t \sigma + w_3 \frac{\partial B_3}{\partial r_t} r_t \sigma &= 0, \\ w_1 \frac{\partial B_1}{\partial b_t} b_t \beta + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial b_t} b_t \beta + w_3 \frac{\partial B_3}{\partial b_t} b_t \beta &= 0. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Por otro lado, a fin de evitar oportunidades de arbitraje libres de riesgo, es necesario que la tasa de rendimiento sobre este portafolio sea igual a la tasa de interés libre de riesgo  $r_t$ . Por supuesto que  $r_t$  es variable, de hecho es estocástica, pero al tiempo  $t$  es completamente conocida. En consecuencia,

$$w_1 \nu_{B_1} + w_2 \nu_{B_2} + w_3 \nu_{B_3} = r_t.$$

Equivalentemente,

$$w_1 \nu_{B_1} + w_2 \nu_{B_2} + w_3 \nu_{B_3} = r_t (w_1 + w_2 + w_3) \quad (10.10)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$w_1 (\nu_{B_1} - r_t) + w_2 (\nu_{B_2} - r_t) + w_3 (\nu_{B_3} - r_t) = 0 \quad (10.11)$$

Las ecuaciones (10.9) y (10.11) se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial r} r_t \sigma & \frac{\partial B_2}{\partial r_t} r_t \sigma & \frac{\partial B_3}{\partial r_t} r_t \sigma \\ \frac{\partial B_1}{\partial b_t} b_t \beta & \frac{\partial B_2}{\partial b_t} b_t \beta & \frac{\partial B_3}{\partial b_t} b_t \beta \\ \nu_{B_1} - r_t & \nu_{B_2} - r_t & \nu_{B_3} - r_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

Observe que si el determinante de la matriz es distinto de cero, entonces el sistema tiene como única solución la solución trivial, es decir,  $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ . Lo que se busca es una solución no trivial, por lo que las filas de la matriz en (10.12) deben ser linealmente dependientes, entonces existen  $\lambda_r$  y  $\lambda_b$  tales que:

$$\begin{aligned} \nu_{B_1} &= r_t + \frac{\partial B_1}{\partial r_t} r_t \sigma \lambda_r + \frac{\partial B_1}{\partial b_t} b_t \beta \lambda_b, \\ \nu_{B_2} &= r_t + \frac{\partial B_2}{\partial r_t} r_t \sigma \lambda_r + \frac{\partial B_2}{\partial b_t} b_t \beta \lambda_b, \\ \nu_{B_3} &= r_t + \frac{\partial B_3}{\partial r_t} r_t \sigma \lambda_r + \frac{\partial B_3}{\partial b_t} b_t \beta \lambda_b. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Dado que estas ecuaciones son idénticas para cualquier fecha de vencimiento, se tiene que

$$\nu_B = r_t + \frac{\partial B}{\partial r_t} r_t \sigma \lambda_r + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \beta \lambda_b \quad (10.14)$$

es independiente del vencimiento  $T$ .

## 10.4 Premio al riesgo de un bono de consolación

En particular, la ecuación (10.14) se cumple para un bono de consolación que paga cupones  $c = 1$  y cuyo precio  $1/b_t$  es independiente de  $r_t$ . Así, si  $B(r_t, b_t, t, \infty) \equiv C(t, b_t, \infty) = 1/b_t$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial r_t} &= \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial r_t \partial b_t} = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial b_t} &= -\frac{1}{b_t^2}, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial b_t^2} &= \frac{2}{b_t^3}.\end{aligned}\tag{10.15}$$

Asimismo,  $\partial B/\partial t = 1$  ya que el bono de consolación paga continuamente una unidad monetaria. Observe ahora que, por un lado, a partir de (10.4) se tiene que

$$\begin{aligned}\nu_B &= \left(1 + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial b_t^2} b_t^2 \beta^2\right) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{b_t} + \frac{\beta^2}{b_t}\right).\end{aligned}\tag{10.16}$$

Mientras que, por otro lado, a partir de (10.14), se tiene que

$$\begin{aligned}\nu_B &= r_t + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \beta \lambda_b \\ &= \left(r_t - \frac{\beta}{b_t} \lambda_b\right).\end{aligned}\tag{10.17}$$

Después de igualar (10.16) con (10.17), se obtiene

$$\lambda_b = \frac{(r_t - 1)b_t + \alpha - \beta^2}{\beta}.\tag{10.18}$$

## 10.5 Ecuación diferencial parcial del precio un bono que depende de las tasas corta y larga

Dado que la prima al riesgo de mercado no depende de las características específicas del instrumento que se utilizó para calcularla, la prima debe ser la misma para cualquier bono. Después de sustituir (10.18) en la ecuación (10.14), se obtiene

$$\nu_B = r_t + \frac{\partial B}{\partial r_t} r_t \sigma \lambda_r + \frac{\partial B}{\partial b_t} [(r_t - 1)b_t - \beta^2] b_t + \frac{\partial B}{\partial b_t} \alpha b_t.\tag{10.19}$$

De lo anterior, se tiene que

$$\frac{\partial B}{\partial b} \alpha b_t = \nu_B - \frac{\partial B}{\partial r} r_t \sigma \lambda_r - r_t - \frac{\partial B}{\partial b_t} ((r_t - 1)b_t - \beta^2) b_t. \quad (10.20)$$

Al sustituir (10.20) en (10.4), se sigue que

$$\begin{aligned} dB = & \left[ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} [a(b - r_t) - r_t \sigma \lambda_r] + \nu_B - r_t - \frac{\partial B}{\partial b_t} ((r_t - 1)b_t - \beta^2) b_t \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial b^2} r_t^2 \sigma^2 + \frac{\partial^2 B}{\partial b_t^2} b_t^2 \beta^2 + 2\rho r_t \sigma b_t \beta \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial b_t} \right) \right] dt \\ & + \frac{\partial B}{\partial r} r_t \sigma dW_t + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \beta dV_t. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Si la tendencia de (10.21) se iguala a  $r_t B$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} [a(b_t - r_t) - r_t \sigma \lambda_r] + \frac{\partial B}{\partial b_t} (\beta^2 b_t - (r_t - 1)b_t^2) \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial b^2} r_t^2 \sigma^2 + \frac{\partial^2 B}{\partial b_t^2} b_t^2 \beta^2 + 2\rho r_t \sigma b_t \beta \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial b_t} \right) + \nu_B - (1 + B)r_t = 0, \end{aligned} \quad (10.22)$$

y así (10.21) se transforma en

$$dB - r_t B = \frac{\partial B}{\partial r} r_t \sigma dW_t + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \beta dV_t.$$

Note que en la ecuación (10.22) no aparece el premio al riesgo  $\lambda_b$ . Falta, por supuesto, la estimación de el premio al riesgo  $\lambda_r$ , la cual puede ser una tarea complicada.

## 11. El modelo de Black, Derman y Toy

El Modelo de Black, Derman y Toy (BDT) es un modelo útil en la valuación de productos derivados sobre bonos cupón cero. La dinámica de la tasa corta es modelada, en términos de su logaritmo, a través de una ecuación diferencial estocástica, que en el caso de media y volatilidad constantes conduce a un modelo del tipo de Vasicek. Asimismo, en este capítulo, se presenta un algoritmo, desarrollado por BDT, para determinar la dinámica de la tasa corta y los precios de bonos cupón cero a distintos vencimientos. El algoritmo requiere como información inicial una curva de rendimiento y “una estructura de plazos de la volatilidad”. Por último, a manera de ilustración, se desarrolla una aplicación detallada del algoritmo de BDT.

### 11.1 Dinámica de la tasa corta con un solo factor

En esta sección se presenta el modelo de BDT con un solo factor. En el modelo, la tasa corta se distribuye como un proceso lognormal, lo que evita que las tasas de interés se tornen negativas. Sin embargo, es importante destacar, que el modelo mantiene aún una desventaja, a saber, que para ciertas especificaciones de la función de la volatilidad, la tasa corta puede no presentar reversión a la media. Además, debido a que la tasa corta sigue un comportamiento lognormal, no es posible, en general, contar con una solución analítica del precio del bono para un vencimiento dado. En este sentido, Black, Derman y Toy han propuesto un algoritmo de valuación que se presenta, en detalle, en el transcurso de este capítulo.

El modelo de BDT supone que la dinámica de la tasa corta es guiada por la siguiente ecuación:

$$r_t = \mu_t e^{\sigma_t W_t}, \quad (11.1)$$

donde  $\mu_t$  es la media de la tasa corta al tiempo  $t$ ,  $\sigma_t$  es la volatilidad de la tasa corta al tiempo  $t$  y  $W_t$  es un movimiento Browniano estándar, es decir,  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ . La ecuación (11.1) puede reescribirse como

$$r_t = e^{\ln \mu_t + \sigma_t W_t}. \quad (11.2)$$

Otra forma alternativa de escribir la expresión anterior está dada por

$$\ln r_t = \ln \mu_t + \sigma_t W_t, \quad (11.3)$$

a partir de lo cual, se obtiene que

$$W_t = \frac{\ln r_t - \ln \mu_t}{\sigma_t}. \quad (11.4)$$

Es decir, la diferencia logarítmica de  $r_t$  con su media, por unidad de volatilidad, se distribuye normalmente con media cero y varianza  $t$ .

Una simple aplicación del lema de Itô al logaritmo de la tasa corta conduce a

$$d \ln r_t = \left( \frac{\partial \ln r_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln r_t}{\partial W_t^2} \right) dt + \frac{\partial \ln r_t}{\partial W_t} dW_t. \quad (11.5)$$

Observe también que

$$\frac{\partial \ln r_t}{\partial t} = \frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t} + W_t \frac{\partial \sigma_t}{\partial t}, \quad (11.6)$$

$$\frac{\partial \ln r_t}{\partial W_t} = \sigma_t \quad (11.7)$$

y

$$\frac{\partial^2 \ln r_t}{\partial W_t^2} = 0. \quad (11.8)$$

Si se sustituyen las derivadas parciales (11.6), (11.7) y (11.8) en (11.5), se obtiene que

$$d \ln r_t = \left[ \frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t} + \left( \frac{\ln r_t - \ln \mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} \right] dt + \sigma_t dW_t. \quad (11.9)$$

Por otro lado, es fácil verificar que

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} = \frac{\partial \ln \sigma_t}{\partial t}. \quad (11.10)$$

Por lo tanto, después de sustituir la ecuación (11.10) en (11.9), se sigue que

$$d \ln r_t = \left[ \frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t} - \frac{\partial \ln \sigma_t}{\partial t} (\ln \mu_t - \ln r_t) \right] dt + \sigma_t dW_t. \quad (11.11)$$

En conclusión, la ecuación diferencial estocástica (11.11) representa la dinámica del logaritmo de la tasa corta en el modelo de DBT. Es conveniente introducir la siguiente notación

$$a_t = - \frac{\partial \ln \sigma_t}{\partial t},$$

$$b_t = \ln \mu_t,$$

$$\gamma_t = \frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t}$$

y

$$X_t = \ln r_t. \quad (11.12)$$

Si se sustituyen todas estas definiciones en (11.11), se tiene que

$$dX_t = [\gamma_t + a_t (b_t - X_t)] dt + \sigma_t dW_t. \quad (11.13)$$

Observe, en particular, que si  $\sigma_t$  y  $\mu_t$  son constantes, entonces  $a = 0 = \alpha$ . De esta manera, la ecuación (11.13) no presenta reversión a la media. En este caso, la ecuación (11.11) se transforma en

$$d \ln r_t = \sigma_t dW_t, \quad (11.14)$$

equivalentemente,

$$\ln r_t = \ln r_0 + \sigma_t (W_t - W_0),$$

ó

$$r_t = r_0 e^{\sigma_t W_t}. \quad (11.15)$$

Por otro lado, si se supone que la volatilidad decae a una tasa positiva, entonces se producirá el efecto de reversión de  $X_t$  a  $b_t$ . Por ejemplo, se puede suponer que la volatilidad decae como

$$\sigma_t = \sigma_0 e^{-at},$$

donde  $a > 0$ . De esta manera,

$$-\frac{\partial \ln \sigma_t}{\partial t} = a.$$

Por lo tanto,

$$dX_t = [\gamma_t + a(b_t - X_t)] dt + \sigma_t dW_t. \quad (11.16)$$

Si además se supone que el logaritmo de la media de la tasa corta es constante, es decir  $\ln \mu_t = b$ , o bien  $\mu_t = e^b$ , entonces

$$\hat{\alpha}_t = \frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t} = 0.$$

Por lo que la ecuación (11.16) se transforma en:

$$dX_t = a(b - X_t) dt + \sigma_t dW_t. \quad (11.17)$$

Esta ecuación es, claramente, del tipo de Vasicek. A partir de (11.17) es posible estimar, a través de regresión lineal simple, los parámetros  $a$  y  $b$ . Si los estimadores de estos parámetros se denotan mediante  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ , respectivamente, entonces

$$\sigma_t = \sigma_0 e^{-\hat{a}t}$$

y

$$\mu_t = e^{\hat{b}}.$$

Por lo tanto,

$$r_t = e^{\hat{b} + \sigma_0 e^{-\hat{a}t} \sqrt{t} \mathcal{E}}, \quad (11.18)$$

donde  $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

## 11.2 El algoritmo de BDT para calcular el precio de un bono cupón cero y la tasa corta

A continuación se presenta el algoritmo de BDT para calcular el precio de un bono cupón cero a diferentes plazos y la tasa corta a través de árboles binomiales con base en las estructuras de plazos de la tasa de interés y de la volatilidad. Para ello, se supone que la tasa corta sigue una distribución lognormal, en particular, la tasa corta sigue una ecuación del la forma (11.1). Con el propósito de ilustrar el funcionamiento del algoritmo, se supone solamente un horizonte de valuación de 4 años. Así, para iniciar el algoritmo, se requiere de la información que aparece en la tabla 11.1.

Estructuras de plazo iniciales		
No. de años para Madurar	Rendimiento $R(0, T)$	Volatilidad $\sigma(0, T)$
1	$R(0, 1)$	$\sigma(0, 1)$
2	$R(0, 2)$	$\sigma(0, 2)$
3	$R(0, 3)$	$\sigma(0, 3)$
4	$R(0, 4)$	$\sigma(0, 4)$

Tabla 11.1 Información inicial

En el algoritmo de BDT, se supone que al final del último periodo el bono cupón cero siempre paga una unidad monetaria, independientemente de la trayectoria tomada en el árbol. De esta manera, el precio del bono se calcula yendo hacia atrás, es decir, se trae a valor presente el valor esperado del precio del bono con la tasa de interés correspondiente. La tasa corta es la tasa de interés anual y ésta se calcula yendo hacia adelante. A continuación se ilustra este procedimiento en detalle.

### 11.2.1 Paso 1 del algoritmo de BDT

En este primer paso, identificado con el superíndice “(1)”, se determina el precio de un bono cupón cero hoy,  $n = 0$ , y que vence en un año,  $T = 1$ . El precio spot del bono, hoy, es denotado por  $B_0^{(1)}$ . Los dos posibles precios del bono en  $n = T = 1$ , se denotan mediante  $B_u^{(1)}$  y  $B_d^{(1)}$ . El árbol binomial inicial se muestra en la figura 11.1.

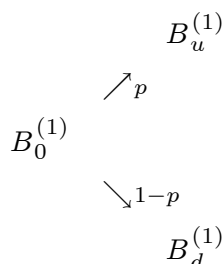


Figura 11.1 Árbol binomial inicial.

Si se supone que el bono siempre paga una unidad monetaria en el vencimiento, entonces es posible calcular  $B_0^{(1)}$ . En efecto, sean  $\tilde{B}_u^{(1)} = 1$  y  $\tilde{B}_d^{(1)} = 1$ , con probabilidades  $p$  y  $1 - p$ , respectivamente. De ahora en adelante, todas las literales que tengan una tilde serán consideradas como cantidades conocidas. Claramente, el precio esperado dentro de un año, en  $T = 1$ , es

$$E[ B_0^{(1)} | \mathcal{I}^{(1)} ] = p\tilde{B}_u^{(1)} + (1 - p)\tilde{B}_d^{(1)} = 1, \quad (11.19)$$

donde  $\mathcal{I}^{(1)}$  es la información disponible en  $T = 1$ . Este valor esperado traído a valor presente, proporciona el precio spot del bono hoy,  $n = 0$ , es decir,

$$\tilde{B}_0^{(1)} = \frac{E[ B_0^{(1)} | \mathcal{I}^{(1)} ]}{1 + R(0, 1)} = \frac{1}{1 + R(0, 1)}, \quad (11.20)$$

donde  $R(0,1)$  es la tasa del bono que madura al año. Así,  $\tilde{B}_0^{(1)} = B(0,1)$  tiene ahora un valor conocido. El árbol binomial para el precio de un bono cupón cero que al final del periodo paga una unidad monetaria, se muestra en la figura 11.2.

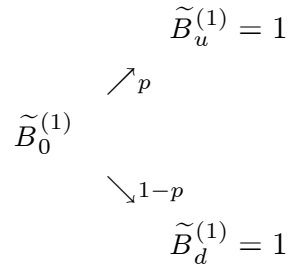


Figura 11.2 Precio spot de un bono cupón cero que vence en un año.

### 11.2.2 Paso 2 del algoritmo de BDT

A continuación se determina el precio, hoy, de un bono cupón cero con madurez a dos años,  $T = 2$ ,  $B_0^{(2)}$ , a partir de precios futuros. Para relacionar los precios futuros con los precios de hoy se utiliza un árbol binomial de dos períodos. En la figura 11.3, se muestra el árbol binomial de precios del bono cupón cero. En este caso, hay dos períodos: de  $n = 0$  a  $n = 1$ , y de  $n = 1$  a  $n = 2$ , así como una fecha de vencimiento  $T = 2$ .

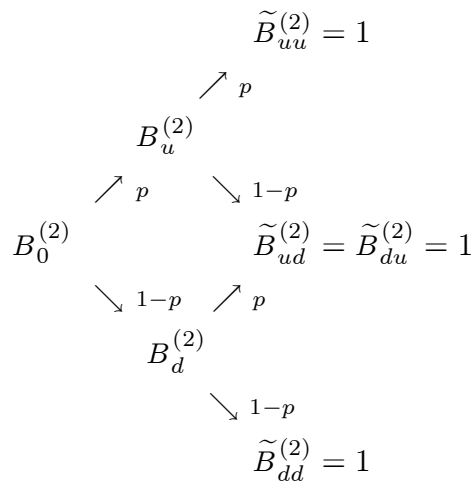


Figura 11.3 Árbol binomial de dos períodos del precio de un bono cupón cero.

Observe que en la figura 11.3, no se conocen los precios del bono para  $n = 0$  y  $n = 1$ , es decir, no se conocen  $B_0^{(2)}$ ,  $B_u^{(2)}$  y  $B_d^{(2)}$ , los cuales se tienen que determinar a través del algoritmo. A partir de la estructura de plazos de la tasa de interés, tabla 11.1, se calcula el precio de un bono cupón cero, hoy, con madurez a dos años,  $B_0^{(2)}$ . De esta manera, y como era de esperarse,

$$E[ B_0^{(2)} | \mathcal{I}^{(2)} ] = p^2 \tilde{B}_{uu}^{(2)} + 2p(1-p) \tilde{B}_{ud}^{(2)} + (1-p)^2 \tilde{B}_{dd}^{(2)} = 1. \quad (11.21)$$

Así,

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0^{(2)} &= \frac{\mathbb{E}[B_0^{(2)} | \mathcal{I}^{(2)}]}{1 + R(0, 2)} \\ &= \frac{1}{(1 + R(0, 2))^2}\end{aligned}\tag{11.22}$$

por lo que  $\tilde{B}_0^{(2)} \equiv B(0, 2)$  tiene ahora un valor conocido. A continuación se calcula el precio del bono dentro de un año cuando tiene madurez de dos años. Para ello, se necesita determinar la tasa corta dentro de un año. En la figura 11.4 se muestra el árbol binomial de los precios de un bono cupón cero que vence en  $T = 2$ .

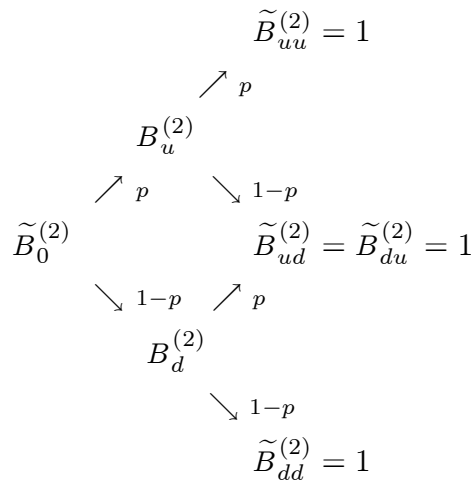


Figura 11.4 Árbol binomial de dos períodos.

Note que el precio del bono  $\tilde{B}_0^{(2)}$ ,  $\tilde{B}_{uu}^{(2)}$ ,  $\tilde{B}_{ud}^{(2)}$  y  $\tilde{B}_{dd}^{(2)}$  son todos ellos conocidos. Observe también que para calcular  $B_u^{(2)}$  y  $B_d^{(2)}$  se requieren los valores de la tasa corta  $r_u$  y  $r_d$ . El árbol binomial para la tasa corta se presenta en la figura 11.5.

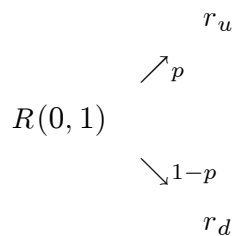


Figura 11.5 Árbol binomial de un periodo para la tasa corta.

A continuación se procede como en la ecuación (11.19) a fin de determinar el precio esperado del bono en un año, esto es

$$\mathbb{E}[B_0^{(2)} | \mathcal{I}^{(1)}] = B_u^{(2)}p + B_d^{(2)}(1 - p).\tag{11.23}$$

El valor esperado del precio del bono dentro de un año, cuando tiene vencimiento en dos años, traído a valor presente, es decir el precio spot del bono, satisface

$$\tilde{B}_0^{(2)} = \frac{B_u^{(2)}p + B_d^{(2)}(1-p)}{1 + R(0,1)}, \quad (11.24)$$

donde  $R(0,1)$  es el rendimiento de un bono que madura en un año y  $\tilde{B}_0^{(2)}$ , el cual fue calculado en la ecuación (11.22) del paso 1. Observe que  $B_u^{(2)}$  y  $B_d^{(2)}$  son cantidades desconocidas, para calcularlas se procede como sigue. En un árbol binomial estándar se tiene que

$$r_u = e^{\sigma(0,T)\sqrt{T/n}} \quad (11.25)$$

y

$$r_d = e^{-\sigma(0,T)\sqrt{T/n}}, \quad (11.26)$$

donde  $n$  representa el número de períodos en el árbol binomial y  $T$  la fecha de madurez del bono. Después de tomar el cociente entre  $r_u$  y  $r_d$ , se tiene que

$$\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right) = 2\sigma(0,T)\sqrt{\frac{T}{n}}. \quad (11.27)$$

Si se despeja  $\sigma(0,T)$  de la ecuación anterior, se obtiene

$$\sigma(0,T) = \frac{1}{2\sqrt{T/n}} \ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right), \quad (11.28)$$

así,

$$r_u = r_d e^{\sigma(0,T)(2\sqrt{T/n})}. \quad (11.29)$$

Observe, en particular, que si  $T = n = 2$ , se obtiene

$$\sigma(0,2) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right), \quad (11.30)$$

o bien

$$r_u = r_d e^{2\sigma(0,2)}. \quad (11.31)$$

Por otro lado, observe que el precio de un bono cupón cero  $B_u^{(2)}$  dentro de un año que paga una unidad monetaria dentro de dos años, traído a valor presente a una tasa corta,  $r_u$ , está dado por

$$B_u^{(2)} = \frac{1}{1 + r_u}. \quad (11.32)$$

Análogamente, para  $B_d^{(2)}$ ,

$$B_d^{(2)} = \frac{1}{1 + r_d}. \quad (11.33)$$

Si se sustituyen (11.32) y (11.33) en la ecuación (11.25), se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0^{(2)} &= \frac{B_u p + B_d(1-p)}{1 + R(0,1)} \\ &= \frac{(1+r_u)^{-1}p + (1+r_d)^{-1}(1-p)}{1 + R(0,1)}.\end{aligned}\tag{11.34}$$

Si ahora se susutituye (11.29) en la ecuación (11.34), se sigue que

$$\tilde{B}_0^{(2)} = \frac{(1+r_d e^{2\sigma_1})^{-1}p + (1+r_d)^{-1}(1-p)}{R(0,1)}.\tag{11.35}$$

Recuerde que  $R(0,1)$ ,  $\tilde{B}_0^{(2)}$  y  $\sigma(0,1)$  son valores conocidos. Por lo que la ecuación (11.35) se puede reescribir como una ecuación homogénea cuadrática,

$$r_d^2 + b r_d + c = 0\tag{11.36}$$

donde  $b$  y  $c$  son cantidades conocidas. Esta ecuación, para un valor fijo de  $p$ , proporciona, una solución de  $r_d$ , denotada por  $\tilde{r}_d$ . Al sustituir este valor en la ecuación (11.31), se tiene que

$$\tilde{r}_u = \tilde{r}_d e^{2\sigma(0,1)}\tag{11.37}$$

es también una cantidad conocida. Con los valores de  $\tilde{r}_u$  y  $\tilde{r}_d$  calculados en (11.36) y (11.37), respectivamente, se calcula los precios  $B_u^{(2)}$  y  $B_d^{(2)}$  de (11.32) y (11.33), mediante

$$\tilde{B}_d^{(2)} = \frac{1}{1 + \tilde{r}_d} \quad \text{y} \quad \tilde{B}_u^{(2)} = \frac{1}{1 + \tilde{r}_u}.\tag{11.38}$$

El árbol binomial de dos períodos de los precios de los bonos cupón cero, completamente determinados, se muestra en la figura 11.6.

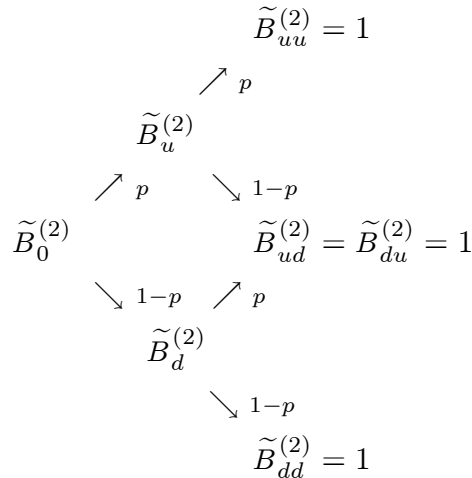


Figura 11.6 Árbol binomial de dos períodos del precio de un bono cupón cero.

Observe ahora que ya se conocen los precios del bono para  $n = 0$  y  $n = 1$  con el supuesto de que en  $T = 2$  el bono vence pagando una unidad monetaria. Además, se han calculado los valores de la tasa corta como se muestra en el árbol binomial de la figura 11.7.

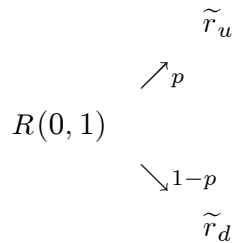


Figura 11.7 Árbol binomial de dos períodos de la tasa corta.

### 11.2.3 Paso 3 del algoritmo de BDT

A continuación se construye el árbol binomial en dos períodos de la tasa corta. El árbol binomial de dos períodos para la tasa corta se presenta en la figura 11.8.

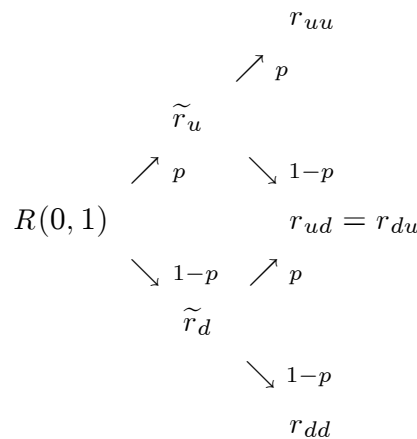


Figura 11.8 Árbol binomial de dos períodos para la tasa corta.

Observe que ahora hay tres tasas cortas desconocidas  $r_{uu}$ ,  $r_{ud}$  y  $r_{dd}$ , y sólo se cuenta con dos fuentes de información: la tabla 11.1 y las tasas  $\tilde{r}_u$ ,  $\tilde{r}_d$ . Para resolver este problema, se consideran los supuestos básicos del modelo de BDT, en cuyo caso

$$\sigma(0,2) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{2}}} \ln \left( \frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{2}}} \ln \left( \frac{r_{ud}}{r_{dd}} \right) \quad (11.39)$$

lo cual implica

$$\ln \left( \frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right) = \ln \left( \frac{r_{ud}}{r_{dd}} \right). \quad (11.40)$$

En consecuencia,

$$r_{dd} = \frac{r_{ud}^2}{r_{uu}}. \quad (11.41)$$

El árbol binomial de tres períodos del precio de un bono cupón cero se muestra en la figura 11.9. Se puede observar que no se conocen los precios de los bonos  $B_0^{(3)}$ ,  $B_u^{(3)}$ ,  $B_d^{(3)}$ ,  $B_{uu}^{(3)}$ ,  $B_{ud}^{(3)}$  y  $B_{dd}^{(3)}$ .

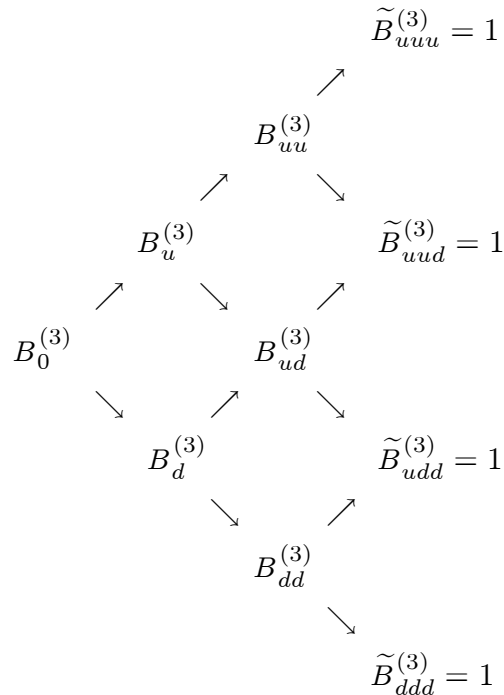


Figura 11.9 Árbol binomial de tres períodos del precio de un bono cupón cero .

Al igual que en el caso del árbol binomial de un solo periodo, se determina el precio del bono cupón cero al inicio del árbol binomial. En este caso, el bono paga una unidad monetaria al final del tercer año. El precio del bono en el presente se calcula trayendo a valor presente dicha unidad monetaria, esto es,

$$\begin{aligned}
 B_0^{(3)} &= \frac{\mathbb{E}[B_0^{(3)} | \mathcal{I}^{(3)}]}{(1 + R(0, 3))^3} \\
 &= \frac{1}{(1 + R(0, 3))^3}.
 \end{aligned}
 \tag{11.42}$$

De esta manera  $\tilde{B}_0^{(3)}$  es ahora una cantidad conocida. Por otro lado, observe que los precios de los bonos cupón cero  $B_{uu}^{(3)}$ ,  $B_{ud}^{(3)}$  y  $B_{dd}^{(3)}$  dentro de dos años,  $n = 2$ , y que pagan una unidad monetaria dentro de tres años,  $T = 3$ , traídos a valor presente al segundo año,  $n = 2$ , a las tasas  $r_{uu}$ ,  $r_{ud}$  y  $r_{dd}$ , respectivamente, están dados por

$$B_{uu}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{uu}}, \quad B_{ud}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{ud}} \quad \text{y} \quad B_{dd}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{dd}}.
 \tag{11.43}$$

Asimismo, el precio del bono en el primer año en términos del precio del bono del segundo año y traído a valor presente en el primer año con la tasa corta calculada en el paso 2, es

igual a:

$$B_u^{(3)} = \frac{pB_{uu}^{(3)} + (1-p)B_{ud}^{(3)}}{1 + \tilde{r}_u} \quad (11.44)$$

y

$$B_d^{(3)} = \frac{(1-p)B_{dd}^{(3)} + pB_{ud}^{(3)}}{1 + \tilde{r}_d}. \quad (11.45)$$

Además, el valor esperado del precio del bono en el primer año,  $n = 1$ , traído a valor presente debe ser igual a el precio spot (hoy) del bono cupón cero, es decir,

$$\tilde{B}_0^{(3)} = \frac{pB_u^{(3)} + (1-p)B_d^{(3)}}{1 + R(0,1)}. \quad (11.46)$$

Si al bono le restan dos años para madurar, sus posibles rendimientos, en cada estado de la naturaleza,  $\nu_u$  y  $\nu_d$  deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$B_u^{(3)} = \frac{1}{(1 + \nu_u)^2}, \quad (11.47)$$

y

$$B_d^{(3)} = \frac{1}{(1 + \nu_d)^2}. \quad (11.48)$$

Si se despeja el rendimiento en las ecuaciones (11.47) y (11.48), esto es,

$$\nu_u = \sqrt{\frac{1}{B_u^{(3)}}} - 1 \quad (11.49)$$

y

$$\nu_d = \sqrt{\frac{1}{B_d^{(3)}}} - 1, \quad (11.50)$$

entonces al utilizar la ecuación (11.28), se tiene que la aplicación de  $\sigma(0, 3)$  para  $n = 3 = T = 3$ , satisface

$$\sigma(0, 3) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\nu_u}{\nu_d} \right).$$

Así,

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\nu_u}{\nu_d} \right) = \sigma(0, 2). \quad (11.51)$$

Por lo tanto,

$$\nu_u = \nu_d e^{2\sigma(0,2)}. \quad (11.52)$$

Si se sustituye la ecuación (11.50) en (11.52), se obtiene

$$\nu_u = \left( \sqrt{\frac{1}{B_d^{(3)}}} - 1 \right) e^{2\sigma(0,2)}. \quad (11.53)$$

Ahora es posible expresar  $B_u^{(3)}$  en términos de  $B_d^{(3)}$  al sustituir la ecuación (11.53) en la ecuación (11.47), es decir,

$$\begin{aligned} B_u^{(3)} &= \frac{1}{(1 + \nu_u)^2} \\ &= \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \left(B_d^{(3)}\right)^{-1/2}\right) e^{2\sigma(0,2)}\right]^2}. \end{aligned} \quad (11.54)$$

Por otra parte, si se sustituyen (11.47), (11.48) y (11.52) en la ecuación (11.46), se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{(3)} &= \frac{pB_u^{(3)} + (1-p)B_d^{(3)}}{1 + R(0,1)} \\ &= \frac{p(1 + \nu_u)^{-2} + (1-p)(1 + \nu_d)^{-2}}{1 + R(0,1)} \\ &= \frac{p(1 + \nu_d e^{2\sigma(0,2)})^{-2} + (1-p)(1 + \nu_d)^{-2}}{1 + R(0,1)}. \end{aligned} \quad (11.55)$$

Se observa en la ecuación anterior que si se fija el valor de  $p$  todo es conocido, excepto  $\nu_d$ . La ecuación (11.55) se puede expresar como un polinomio de cuarto grado en  $\nu_d$  igualado a cero, es decir,

$$\nu_d^4 + a_1\nu_d^3 + b_1\nu_d^2 + c_1\nu_d + d_1 = 0, \quad (11.56)$$

donde  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  y  $d_1$  son cantidades conocidas. Al resolver esta ecuación se obtiene un valor  $\tilde{\nu}_d$ , el cual se sustituye, a su vez, en (11.52), obteniendo con esto que

$$\tilde{\nu}_u = \tilde{\nu}_d e^{2\sigma(0,2)}. \quad (11.57)$$

Una vez que se tienen los valores  $\tilde{\nu}_u$  y  $\tilde{\nu}_d$ , éstos se sustituyen en la ecuaciones (11.47) y (11.48), respectivamente, de tal manera que:

$$\tilde{B}_u^{(3)} = \frac{1}{(1 + \tilde{\nu}_u)^2} \quad (11.58)$$

y

$$\tilde{B}_d^{(3)} = \frac{1}{(1 + \tilde{\nu}_d)^2}. \quad (11.59)$$

A continuación se determinan los valores de  $r_{uu}$ ,  $r_{ud}$  y  $r_{dd}$ . Para ello, se utilizan las ecuaciones (11.44) y (11.45) expresadas como

$$(1 + \tilde{r}_u)\tilde{B}_u^{(3)} = pB_{uu}^{(3)} + (1-p)B_{ud}^{(3)} \quad (11.60)$$

y

$$(1 + \tilde{r}_d)\tilde{B}_d^{(3)} = pB_{dd}^{(3)} + (1-p)B_{ud}^{(3)}, \quad (11.61)$$

donde  $\tilde{B}_u^{(3)}$  y  $\tilde{B}_d^{(3)}$  son valores conocidos. Si se sustituyen las expresiones para  $B_{uu}^{(3)}$  y  $B_{dd}^{(3)}$  que aparecen en la ecuación (11.43), las dos ecuaciones anteriores se pueden reescribir en una sola ecuación que considera a

$$r_{uu} = r_{ud}e^{2\sigma(0,2)} \quad \text{y} \quad r_{dd} = r_{ud}e^{-2\sigma(0,2)}. \quad (11.62)$$

Además, a partir de (11.41) se tiene que  $r_{uu}r_{dd} = r_{ud}^2$ . Al resolver la ecuación resultante en  $r_{ud}$ , después de realizar todas las sustituciones planteadas, se obtiene un polinomio de segundo grado en  $r_{ud}$  igualado a cero:

$$r_{ud}^2 + b_2r_{ud} + c_2 = 0,$$

donde  $b_2$  y  $c_2$  son cantidades conocidas. La solución de esta ecuación cuadrática proporciona un valor  $\tilde{r}_{ud}$ . Posteriormente, se sustituye este valor de  $\tilde{r}_{ud}$  en (11.62), de tal manera que

$$\tilde{r}_{uu} = \tilde{r}_{ud}e^{2\sigma(0,2)} \quad (11.63)$$

y

$$\tilde{r}_{dd} = \tilde{r}_{ud}e^{-2\sigma(0,2)}. \quad (11.64)$$

Los valores obtenidos de la tasa corta,  $\tilde{r}_{uu}$ ,  $\tilde{r}_{ud}$  y  $\tilde{r}_{dd}$ , se sustituyen en las ecuaciones que aparecen en (11.43), esto es,

$$\tilde{B}_{uu}^{(3)} = \frac{1}{1 + \tilde{r}_{uu}}, \quad (11.65)$$

$$\tilde{B}_{ud}^{(3)} = \frac{1}{1 + \tilde{r}_{ud}} \quad (11.66)$$

y

$$\tilde{B}_{dd}^{(3)} = \frac{1}{1 + \tilde{r}_{dd}} \quad (11.67)$$

Por lo tanto, ya se conocen los valores  $\tilde{B}_{uu}^{(3)}$ ,  $\tilde{B}_{ud}^{(3)}$  y  $\tilde{B}_{dd}^{(3)}$ . Los árboles binomiales de la tasa corta para dos períodos y del precio del bono cupón cero para tres periodos se muestran, respectivamente, en las figuras 11.10 y 11.11.

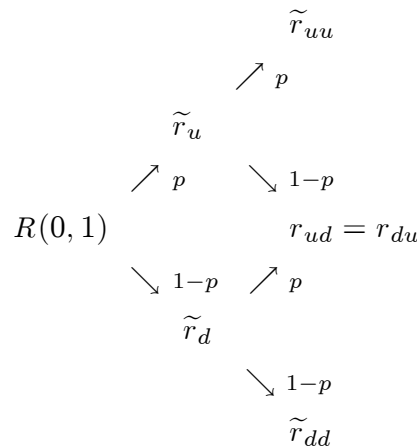


Figura 11.10 Árbol binomial de dos períodos de la tasa corta.

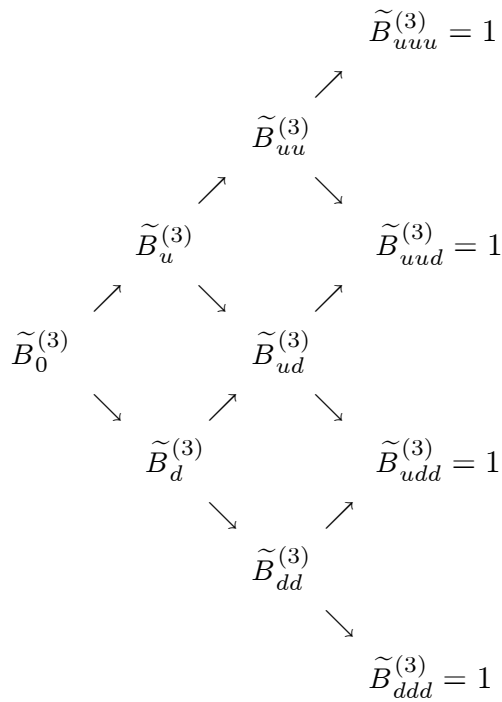


Figura 11.11 Árbol binomial de tres períodos del precio un bono cupón cero.

#### 11.2.4 Paso 4 del algoritmo de BDT

A continuación se construyen los árboles binomiales de la tasa corta para tres períodos y del precio del bono cupón cero para cuatro períodos a fin de establecer un procedimiento para determinar las cantidades relevantes.

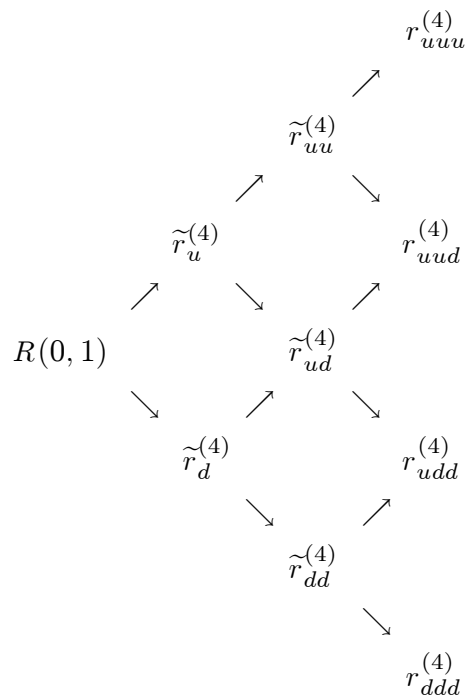


Figura 11.12 Árbol binomial de tres períodos de la tasa corta.

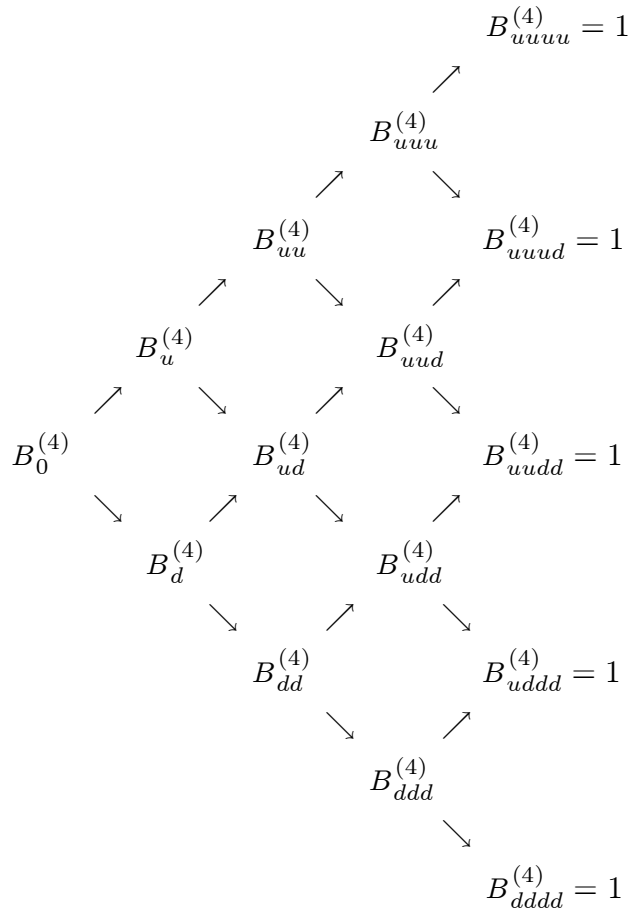


Figura 11.13 Árbol binomial de cuatro períodos del precio de un bono cupón cero.

Las ecuaciones que se utilizan para resolver estos árboles binomiales de tasas y precios son:

$$B_0^{(4)} = \frac{(p + (1 - p))^4}{(1 + R(0, 4))^4} = \frac{1}{(1 + R(0, 4))^4}, \quad (11.68)$$

$$B_{uuu}^{(4)} = \frac{1}{1 + r_{uuu}}, \quad B_{uud}^{(4)} = \frac{1}{1 + r_{uud}}, \quad B_{udd}^{(4)} = \frac{1}{1 + r_{udd}} \quad \text{y} \quad B_{ddd}^{(4)} = \frac{1}{1 + r_{ddd}}. \quad (11.69)$$

Asimismo, el precio del bono en el segundo año en términos del precio del bono del tercer año y traído a valor presente en el segundo año con la tasa corta calculada en el paso 3, para cada estado de la naturaleza, es

$$B_{uu}^{(4)} = \frac{pB_{uuu} + (1 - p)B_{uud}}{1 + \tilde{r}_{uu}}, \quad (11.70)$$

$$B_{ud}^{(4)} = \frac{pB_{uud} + (1 - p)B_{udd}}{1 + \tilde{r}_{ud}} \quad (11.71)$$

y

$$B_{dd}^{(4)} = \frac{pB_{udd} + (1 - p)B_{ddd}}{1 + \tilde{r}_{dd}}. \quad (11.72)$$

Posteriormente, el precio del bono en el primer año en términos del precio del bono del segundo año y traído a valor presente en el primer año con la tasa corta calculada en el paso 2 satisface, en cada estado de la naturaleza,

$$B_u^{(4)} = \frac{pB_{uu} + (1-p)B_{ud}}{1 + \tilde{r}_u} \quad (11.73)$$

y

$$B_d^{(4)} = \frac{(1-p)B_{dd} + pB_{ud}}{1 + \tilde{r}_d}. \quad (11.74)$$

Además, el valor esperado del precio del bono en el primer año y traído a valor presente debe ser igual a el precio spot (hoy) del bono cupón cero, es decir,

$$\tilde{B}_0^{(4)} = \frac{pB_u + (1-p)B_d}{1 + R(0,1)}. \quad (11.75)$$

Si a los bonos les restan dos años para madurar, entonces sus precios en términos de sus correspondientes rendimientos tienen que satisfacer las siguientes relaciones:

$$B_{uu}^{(4)} = \frac{1}{(1 + \nu_{uu})^2}, \quad (11.76)$$

$$B_{ud}^{(4)} = \frac{1}{(1 + \nu_{ud})^2}, \quad (11.77)$$

$$B_{dd}^{(4)} = \frac{1}{(1 + \nu_{dd})^2}, \quad (11.78)$$

$$B_u^{(4)} = \frac{1}{(1 + y_u)^3} \quad (11.79)$$

y

$$B_d^{(4)} = \frac{1}{(1 + y_d)^3}, \quad (11.80)$$

donde  $y_1$  y  $y_1$  son los rendimientos entre el primer y cuarto períodos. Al resolver las ecuaciones de (11.73) a la (11.75) de manera recursiva se obtienen los valores de la tasa corta para el tercer periodo y los precios del bono cupón cero para el cuarto periodo. Por lo que se tienen los árboles binomiales, resueltos completamente, en las figuras 11.14 y 11.15.

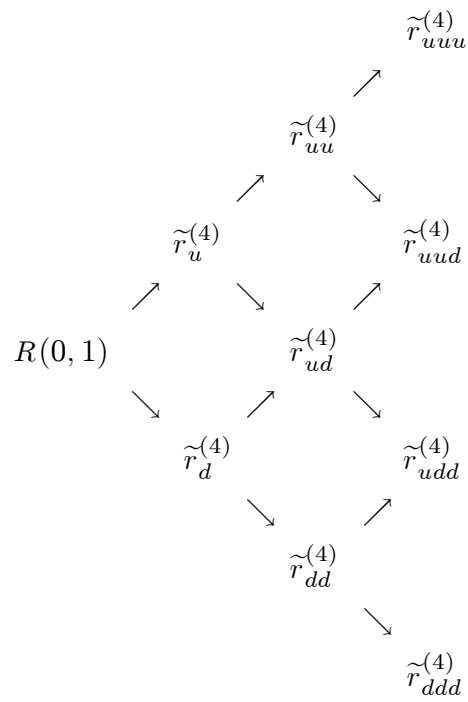


Figura 11.14 Árbol binomial de tres períodos de la tasa corta.

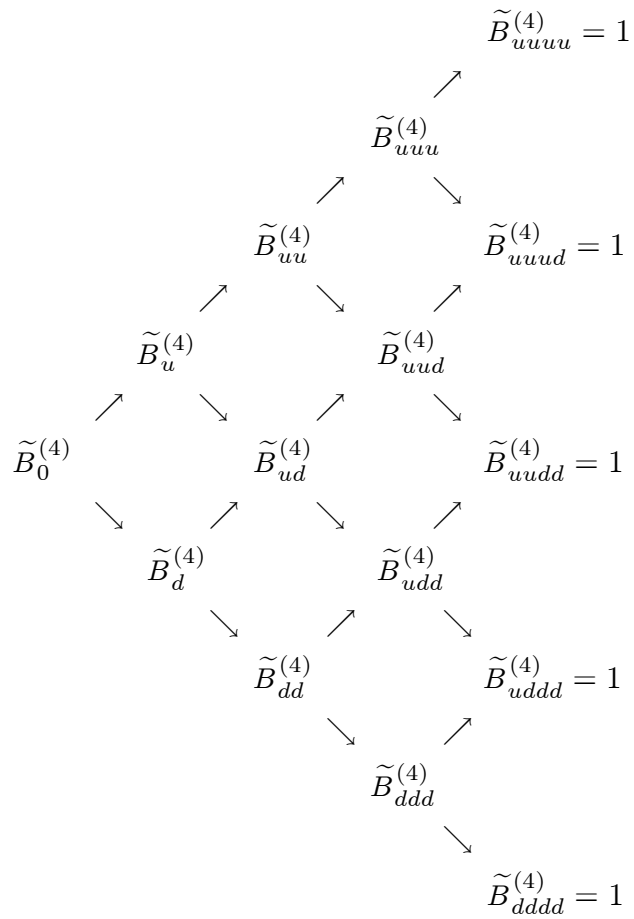


Figura 11.15 Árbol binomial de cuatro períodos del precio de un bono cupón cero.

## 11.5. Aplicación del modelo de Black, Derman y Toy

Considere la siguiente información inicial que requiere el algoritmo de BDT.

Estructuras de plazos		
No. de años para Madurar	Curva de rendimiento $R(0, T)$	Volatilidad $\sigma(0, T)$
1	0.09	0.24
2	0.095	0.22
3	0.10	0.20
4	0.105	0.19

Tabla 11.2 Información inicial.

### 11.5.1 Paso 1

Suponga que  $\tilde{B}_u^{(1)} = 1$  y  $\tilde{B}_d^{(1)} = 1$ , y considere el árbol binomial de la figura 11.16.

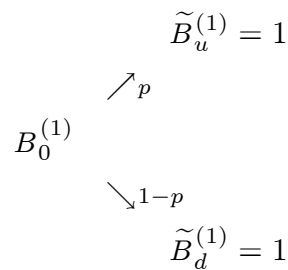


Figura 11.16 Árbol binomial en un periodo.

Si  $R(0, 1) = 0.09$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_0^{(1)} &= \frac{1}{1 + R(0, 1)} \\
 &= \frac{1}{1 + 0.09} \\
 &= 0.9174.
 \end{aligned}
 \tag{11.81}$$

El árbol binomial resultante para el precio de un bono cupón cero que al final del periodo paga una unidad monetaria se muestra en la figura 11.17.

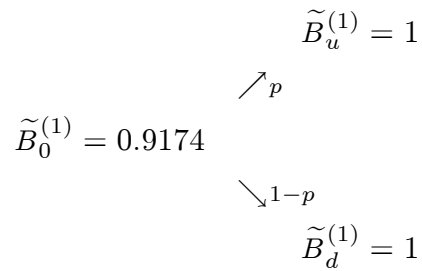


Figura 11.17 Precio spot de un bono cupon cero en un periodo.

### 11.5.2 Paso 2

A continuación se calcula el árbol binomial de dos períodos para el precio de un bono cupón cero.

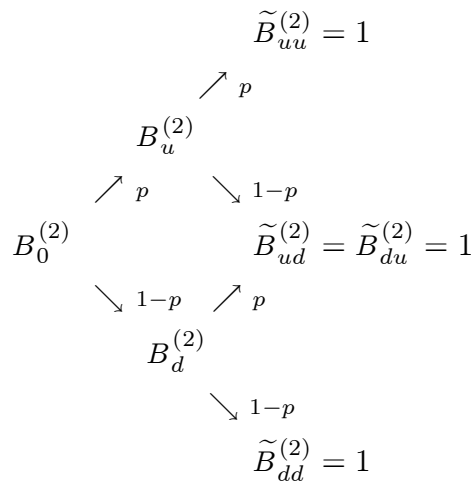


Figura 11.18 Árbol binomial de dos períodos.

Observe ahora que en este caso

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_0^{(2)} &= \frac{1}{(1 + R(0, 2))^2} \\
 &= \frac{1}{(1 + 0.095)^2} \\
 &= 0.8340.
 \end{aligned} \tag{11.82}$$

En la figura 11.19 se muestra el árbol binomial de dos períodos del precio de un bono cupón cero.

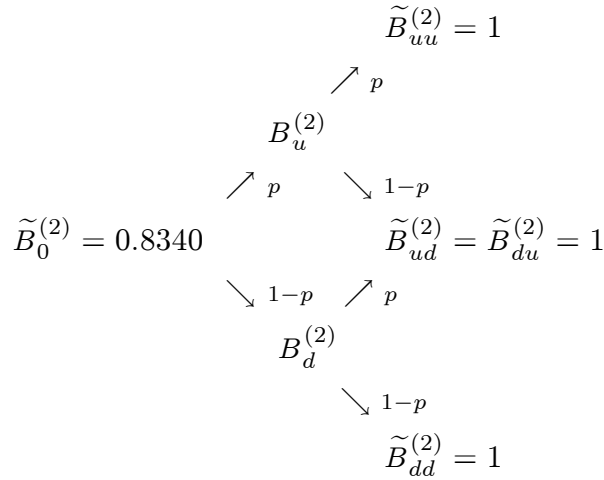


Figura 11.19 Árbol binomial de dos períodos.

El árbol binomial que se desea calcular para la tasa corta se muestra en la figura 11.20.

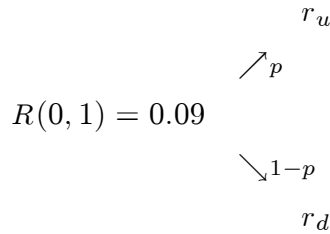


Figura 11.20 Árbol binomial de un período para la tasa corta.

Si  $R(0, 1) = 0.09$  y el precio spot del bono es  $\tilde{B}_0^{(2)} = 0.8340$ , entonces (11.24) implica

$$0.8340 = \frac{B_u^{(2)}p + B_d^{(2)}(1-p)}{1 + 0.09}. \quad (11.83)$$

Asimismo, por (11.30)

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{r_u}{r_d} \right) = 0.22 = \sigma(0, 2). \quad (11.84)$$

Si se despeja  $r_u$  de la ecuación (11.84), se tiene que

$$r_u = r_d e^{0.22(2)}. \quad (11.85)$$

Por otro lado,

$$B_u^{(2)} = \frac{1}{1 + r_u}. \quad (11.86)$$

Análogamente para  $B_d$ ,

$$B_d^{(2)} = \frac{1}{1 + r_d}. \quad (11.87)$$

Se considera  $p = \frac{1}{2}$  por simplicidad, pero podría tomarse cualquier otro valor. Así, la sustitución de (11.86) y (11.87) en (11.83) conduce a

$$0.8340 = \frac{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+r_u} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+r_d} \right) \right]}{1+0.09}. \quad (11.88)$$

Si se incorpora la ecuación (11.85) en (11.88), se obtiene que

$$0.8340 = \frac{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+r_d e^{0.22(2)}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+r_d} \right) \right]}{1+0.09}. \quad (11.89)$$

Esta ecuación puede reescribirse como:

$$r_d^2 + r_d \left( \frac{\gamma_1 e^{0.22(2)} - e^{0.22(2)} + \gamma_1 - 1}{\gamma_1 e^{0.22(2)}} \right) + \frac{\gamma_1 - 2}{\gamma_1 e^{0.22(2)}} = 0, \quad (11.90)$$

donde  $\gamma_1 = (1+0.09)0.8340/0.50$ . Equivalentemente,

$$r_d^2 + 0.73978564r_d - 0.06442773 = 0.$$

La solución positiva de esta ecuación de segundo grado es  $\tilde{r}_d = 0.0787$ . Si se sustituye este valor en (11.85), se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{r}_u &= \tilde{r}_d e^{0.22(2)} \\ &= 0.0787 e^{0.22(2)} \\ &= 0.1222. \end{aligned}$$

Por último, los valores  $\tilde{r}_u$  y  $\tilde{r}_d$  se sustituyen en (11.86) y (11.87), respectivamente, de tal manera que

$$\begin{aligned} \tilde{B}_d^{(2)} &= \frac{1}{1+r_d} \\ &= \frac{1}{1+0.0787} \\ &= 0.9270 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{B}_u^{(2)} &= \frac{1}{1+r_u} \\ &= \frac{1}{1+0.1222} \\ &= 0.8911 \end{aligned}$$

Los árboles binomiales, completamente determinados, para el precio de un bono cupón cero, con vencimiento en  $T = 2$ , y la tasa corta se muestran, respectivamente, en las figuras 11.21 y 11.22.

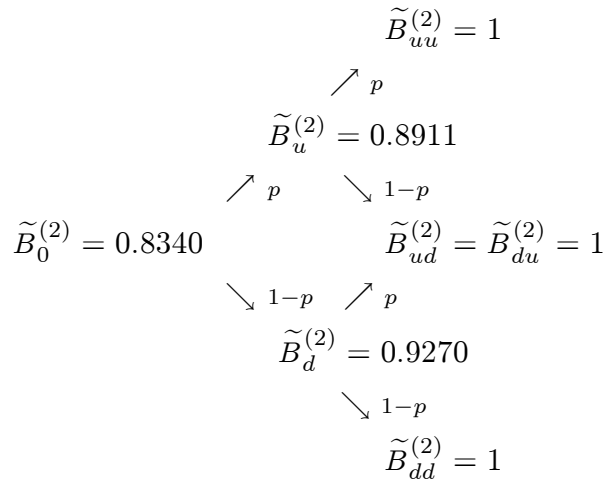


Figura 11.21 Árbol binomial de dos períodos del precio de un bono cupón cero.

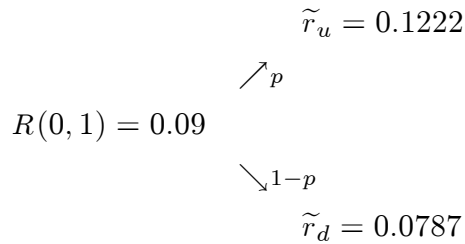


Figura 11.22 Árbol binomial de dos períodos de la tasa corta.

### 11.5.3 Paso 3

En la figura 11.23 se muestra el árbol binomial que se desea calcular para las tasas en dos períodos.

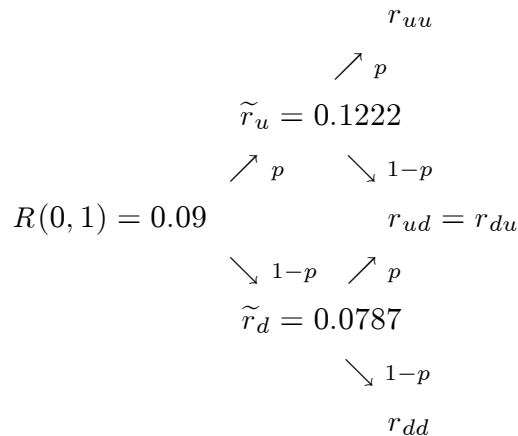


Figura 11.23 Árbol binomial en dos períodos de la tasa corta.

En virtud de (11.39), se tiene que

$$\sigma(0,2) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r_{ud}}{r_{dd}} \right). \quad (11.91)$$

Por lo tanto,

$$r_{dd} = \frac{r_{ud}^2}{r_{uu}}. \quad (11.92)$$

Considere ahora

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{(3)} &= \frac{1}{(1 + R(0, 3))^3} \\ &= \frac{1}{(1 + 0.10)^3} \\ &= 0.7513 \end{aligned} \quad (11.93)$$

Observe que

$$B_{uu}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{uu}}, \quad B_{ud}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{ud}} \quad \text{y} \quad B_{dd}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{dd}}. \quad (11.94)$$

Asimismo, note que

$$B_u^{(3)} = \frac{\frac{1}{2}B_{uu}^{(3)} + \frac{1}{2}B_{ud}^{(3)}}{1 + 0.1222} \quad (11.95)$$

y

$$B_d^{(3)} = \frac{\frac{1}{2}B_{dd}^{(3)} + \frac{1}{2}B_{ud}^{(3)}}{1 + 0.0787}. \quad (11.96)$$

Además, de (11.93) se sigue que

$$0.7513 = \frac{\frac{1}{2}B_u^{(3)} + \frac{1}{2}B_d^{(3)}}{1 + 0.09}, \quad (11.97)$$

donde

$$B_u^{(3)} = \frac{1}{(1 + \nu_u)^2} \quad (11.98)$$

y

$$B_d^{(3)} = \frac{1}{(1 + \nu_d)^2}. \quad (11.99)$$

Si se despejan  $\nu_u$  y  $\nu_d$ , se obtiene que

$$\nu_u = \sqrt{\frac{1}{B_u^{(3)}}} - 1 \quad (11.100)$$

y

$$\nu_d = \sqrt{\frac{1}{B_d^{(3)}}} - 1 \quad (11.101)$$

Por otro lado,

$$\sigma(0, 3) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\nu_u}{\nu_d} \right) = 0.20, \quad (11.102)$$

lo cual implica

$$\nu_u = \nu_d e^{0.40}. \quad (11.103)$$

Si se sustituye (11.101) en (11.103), se sigue que

$$\begin{aligned} \nu_u &= \nu_d e^{0.40} \\ &= \left( \sqrt{\frac{1}{B_d^{(3)}}} - 1 \right) e^{0.40}. \end{aligned} \quad (11.104)$$

Se verá a continuación que  $(B_u^{(3)})$  se puede expresar en función de  $B_d^{(3)}$ . En efecto, al sustituir (11.104) en la ecuación (11.98), se tiene que

$$\begin{aligned} B_u^{(3)} &= \frac{1}{(1 + \nu_u)^2} \\ &= \frac{1}{\left[ 1 + \left( \left( B_d^{(3)} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) e^{0.40} \right]^2}. \end{aligned} \quad (11.105)$$

Por otra parte, si se sustituyen (11.98) y (11.99) en la ecuación (11.97), se tiene

$$\begin{aligned} 0.7513 &= \frac{\frac{1}{2}B_u^{(3)} + \frac{1}{2}B_d^{(3)}}{1 + 0.09} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1 + \nu_u)^{-2} + \frac{1}{2}(1 + \nu_d)^{-2}}{1 + 0.09}. \end{aligned} \quad (11.106)$$

Esta ecuación se puede expresar como

$$\frac{0.7513(1.09)}{0.50} = \frac{1}{(1 + \nu_u)^2} + \frac{1}{(1 + \nu_d)^2}. \quad (11.107)$$

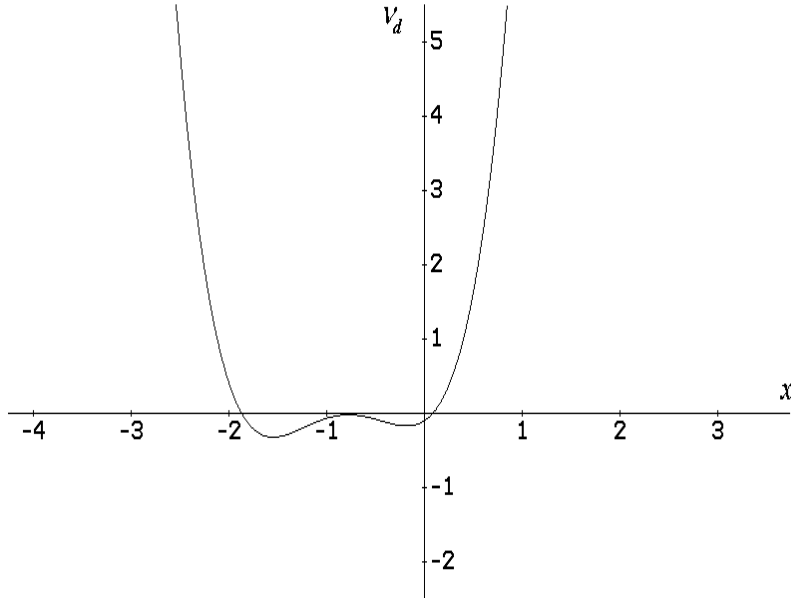
Sea  $\gamma_2 = 0.7513(1.09)/0.50 = 1.64$ . La sustitución de (11.103), junto con el valor de  $\gamma_2$ , en (11.107), conduce a

$$1.64 = \frac{1}{(1 + \nu_d e^{0.40})^2} + \frac{1}{(1 + \nu_d)^2}. \quad (11.108)$$

Note que la ecuación (11.108) se puede expresar como un polinomio de cuarto grado igualado a cero, es decir

$$\nu_d^4 + 3.34\nu_d^3 + 3.25\nu_d^2 + 0.87\nu_d - 0.10 = 0. \quad (11.109)$$

La solución positiva es  $\nu_d = 0.085$ . La gráfica 11.1 muestra el polinomio (11.109) en  $\nu_d$



Grafica 11.11 El polinomio en  $V_d$

El valor  $\tilde{\nu}_d$  se sustituye ahora en la ecuación (11.103), así

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nu}_u &= \tilde{\nu}_d e^{0.4} \\
 &= 0.085 e^{0.40} \\
 &= 0.13.
 \end{aligned}
 \tag{11.110}$$

Por otro lado, los valores  $\tilde{\nu}_u$  y  $\tilde{\nu}_d$  se sustituyen en (11.98) y (11.99), respectivamente, de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_u^{(3)} &= \frac{1}{(1 + \tilde{\nu}_u)^2} \\
 &= \frac{1}{(1 + 0.13)^2} \\
 &= 0.7881
 \end{aligned}
 \tag{11.111}$$

y

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_d^{(3)} &= \frac{1}{(1 + \tilde{\nu}_d)^2} \\
 &= \frac{1}{(1 + 0.084)^2} \\
 &= 0.8498
 \end{aligned}
 \tag{11.112}$$

A continuación se determinan los valores de  $r_{uu}$ ,  $r_{ud}$  y  $r_{dd}$ . Para ello, se utilizan las ecuaciones (11.95) y (11.96) expresadas como

$$(1 + 0.1222)\tilde{B}_u^{(3)} = 0.5B_{uu}^{(3)} + 0.5B_{ud}^{(3)} \quad (11.113)$$

y

$$(1 + 0.0787)\tilde{B}_d^{(3)} = 0.5B_{dd}^{(3)} + 0.5B_{ud}^{(3)}. \quad (11.114)$$

Al sustituir (11.94) en las ecuaciones anteriores, se tiene

$$1.122\tilde{B}_u^{(3)} = 0.5\frac{1}{1 + r_{uu}} + 0.5\frac{1}{1 + r_{ud}}$$

y

$$1.0787\tilde{B}_d^{(3)} = 0.5\frac{1}{1 + r_{dd}} + 0.5\frac{1}{1 + r_{ud}}.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + r_{uu}} + \frac{1}{1 + r_{ud}} &= \frac{1.1222}{0.50} (0.7881) \\ \frac{1}{1 + r_{dd}} + \frac{1}{1 + r_{ud}} &= \frac{1.0787}{0.50} (0.8498) \end{aligned} \quad (11.115)$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden reescribir en una sola ecuación considerando que  $r_{uu} = r_{ud}e^{0.40}$ ,  $r_{dd} = r_{ud}e^{-0.40}$  y

$$r_{uu}r_{dd} = r_{ud}^2. \quad (11.116)$$

Por lo tanto,

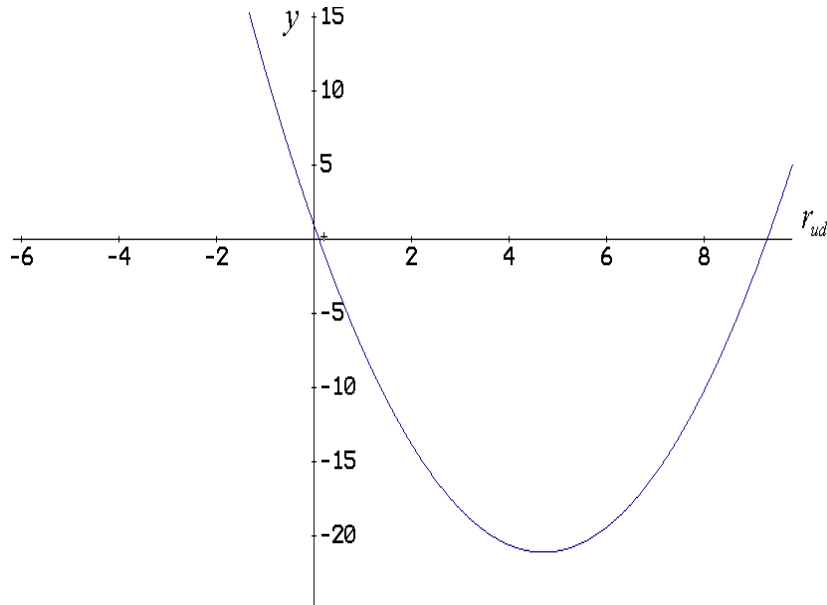
$$r_{ud}^2 - 10.55r_{ud} + 1 = 0. \quad (11.117)$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos soluciones  $r_{ud} = 10.4496$  y  $r_{ud} = 0.0957$ , véase gráfica 11.2. Se considera sólo al valor menor que uno,  $\tilde{r}_{ud} = 0.0957$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{uu} &= \tilde{r}_{ud}e^{0.4} \\ &= 0.0957e^{0.3648} \\ &= 0.1428 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{dd} &= \tilde{r}_{ud}e^{-0.4} \\ &= 0.0957e^{-0.3648} \\ &= 0.06414 \end{aligned} \quad (11.118)$$



Gráfica 11.2 Polinomio de  $r_{ud}$

Por último, los valores obtenidos de la tasa corta,  $\tilde{r}_{uu}$ ,  $\tilde{r}_{ud}$  y  $\tilde{r}_{dd}$ , se sustituyen en las ecuaciones que aparecen en (11.94), esto es,

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{uu}^{(3)} &= \frac{1}{1 + \tilde{r}_{uu}} \\
 &= \frac{1}{1 + 0.1428} \\
 &= 0.8751
 \end{aligned}
 \tag{11.119}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{ud}^{(3)} &= \frac{100}{1 + \tilde{r}_{ud}} \\
 &= \frac{100}{1 + 0.0957} \\
 &= 0.9127
 \end{aligned}
 \tag{11.120}$$

$$\begin{aligned}
 B_{dd}^{(3)} &= \frac{100}{1 + \tilde{r}_{dd}} \\
 &= \frac{100}{1 + 0.0642} \\
 &= 0.9327
 \end{aligned}
 \tag{11.121}$$

El árbol binomial de dos períodos para la tasa corta y el árbol binomial de tres períodos para el precio del bono cupón cero que vence en  $T = 3$  se muestran, respectivamente, en las figuras 11.26 y 11.27.

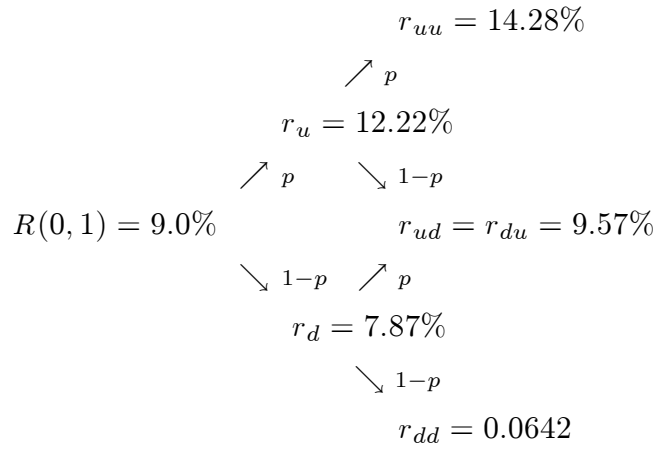


Figura 11.26 Árbol binomial de dos períodos para la tasa corta.

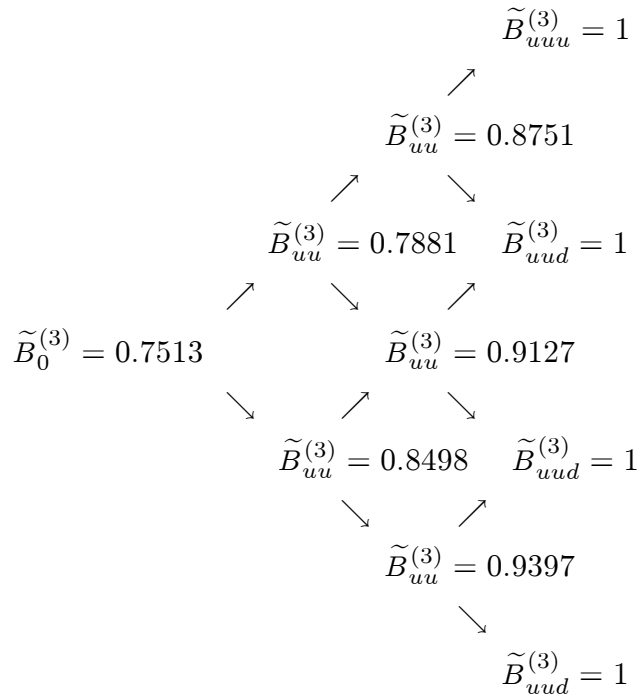


Figura 11.27 Árbol binomial de tres períodos para el precio de un bono cupón cero.

## 12. El teorema de Girsanov y valuación de bonos cupón cero

En esta sección, se utiliza el teorema de Girsanov para valorar bonos cupón cero. El precio del bono es expresado en términos de un numerario, la cuenta bancaria, a fin de transformarlo en una martingala bajo una nueva medida de probabilidad equivalente neutral al riesgo. Posteriormente, con esta nueva medida de probabilidad se calcula el precio del bono como el valor esperado del inverso del numerario condicional a la información del mercado con que se cuenta en el presente.

### 12.1 Dinámica de la tasa corta y el teorema de Girsanov

El teorema de Girsanov construye explícitamente una medida de probabilidad equivalente, definida sobre el mismo espacio de probabilidad, que permite transformar un movimiento Browniano con tendencia en uno sin tendencia.

Sea  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada,  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . Se supone que la dinámica de la tasa corta es conducida por el proceso

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t. \quad (12.1)$$

Se supone también que el proceso  $\{r_t\}_{t \geq 0}$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  y  $\mu(r_t, t)$  y  $\sigma(r_t, t)$  son funciones conocidas. Ahora bien, si se define

$$\widetilde{W}_t = \lambda_t t + W_t, \quad (12.2)$$

donde la cantidad  $\lambda_t \equiv \lambda(r_t, t)$  es el premio al riesgo (de mercado), o precio de mercado del riesgo (de tasa de interés), entonces la ecuación (12.1) puede reescribirse como

$$dr_t = [\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)] dt + \sigma(r_t, t)d\widetilde{W}_t, \quad (12.3)$$

Observe que el término de tendencia del proceso representado en (12.3) se ha modificado sin que se altere la varianza. El teorema de Girsanov proporciona una medida de probabilidad

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi_T^{(\lambda)} d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}, \quad (12.4)$$

donde

$$\varphi_T^{(\lambda)} = \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds \right\}. \quad (12.5)$$

La probabilidad  $\widetilde{\mathbb{P}}$  está definida en el espacio muestral original,  $\Omega$ . Bajo esta nueva medida de probabilidad,  $\widetilde{W}_t$  es un movimiento Browniano. Se dice, en este caso, que la medida de probabilidad  $\widetilde{\mathbb{P}}$  es neutral al riesgo.

### 12.2 Ecuación diferencial parcial de un bono cupón cero

En lo que sigue se denotará al precio de un bono cupón cero mediante  $B(t, T)$  ó  $B(r_t, t; T)$ , en esta última se hace énfasis, cuando sea necesario, en la dependencia de la tasa corta. El Lema de Itô, en términos de  $\widetilde{W}_t$ , conduce a

$$dB = \left( \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} [\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)] + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial B}{\partial r_t}\sigma(r_t, t)d\widetilde{W}_t. \quad (12.6)$$

Por otro lado, en ausencia de oportunidades de arbitraje, la ecuación diferencial que satisface cualquier bono está dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \frac{\partial B}{\partial r_t} [\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)] - r_t B = 0, \quad (12.7)$$

junto con la condición final  $B(T, T) = 1$ . Claramente, (12.6) y (12.7) implican

$$dB = r_t B dt + \frac{\partial B}{\partial r_t}\sigma(r_t, t)d\widetilde{W}_t, \quad (12.8)$$

ó

$$dB = r_t B dt + B\widehat{\sigma}_t d\widetilde{W}_t, \quad (12.9)$$

donde

$$\widehat{\sigma}_t = \left( \frac{\partial B}{\partial r_t} \right) \frac{\sigma(r_t, t)}{B}.$$

A partir de la aplicación del lema de Itô a  $\ln B(t, T)$  y (12.9), se sigue que

$$\begin{aligned} B(t, T) &= B(0, T) \exp \left\{ \int_0^t \widehat{\sigma}_s d\widetilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \widehat{\sigma}_s^2 ds + \int_0^t r_s ds \right\} \\ &= B(0, T) M_t \exp \left\{ \int_0^t \widehat{\sigma}_s d\widetilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \widehat{\sigma}_s^2 ds \right\}. \end{aligned}$$

### 12.3 Cambio de numerario

Considere un depósito bancario de  $M_t$  unidades monetarias, al tiempo  $t$ , que paga una tasa de interés constante y libre de riesgo. El rendimiento del depósito durante el instante  $dt$  está representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$dM_t = r_t M_t dt. \quad (12.10)$$

Por supuesto,  $r_t$  es estocástica, pero dada la información del mercado al tiempo  $t$ ,  $\mathcal{F}_t$ , se tiene que  $r_t$  es conocida y por lo tanto libre de riesgo. Si se hace un depósito inicial  $M_0 = 1$  el retorno de la inversión es

$$M_t = \exp \left\{ \int_0^t r_s ds \right\}. \quad (12.11)$$

La ecuación anterior es llamada cuenta del mercado de dinero o, simplemente, cuenta bancaria. En lo que sigue, por conveniencia, se utilizará la notación  $B_t \equiv B(t, r_t; T)$ , destacando la dependencia en  $t$ . Se define ahora

$$\tilde{B}_t = \frac{B_t}{M_t}. \quad (12.12)$$

Note que  $M_0 = 1$ , lo cual implica  $\tilde{B}_0 = B_0$ . La ecuación (12.12) expresa simplemente un cambio en la forma de medir una variable con respecto de una cantidad positiva en una inversión libre de riesgo. En este caso, en virtud de (12.8), se cumple que

$$\begin{aligned} d\tilde{B}_t &= -r_t \tilde{B}_t dt + \frac{1}{M_t} dB_t \\ &= -r_t \tilde{B}_t dt + \frac{1}{M_t} \left( r_t B_t dt + \frac{\partial B_t}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) d\tilde{W}_t \right) \\ &= \frac{\partial B_t}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) d\tilde{W}_t \end{aligned} \quad (12.13)$$

En otras palabras, bajo  $\tilde{\mathbb{P}}$ ,  $\tilde{B}_t$  es una martingala. Una forma alternativa de escribir (12.13) es

$$d\tilde{B}_t = \tilde{\sigma}_t d\tilde{W}_t, \quad (12.14)$$

donde

$$\tilde{\sigma}_t = \left( \frac{\partial B_t}{\partial r_t} \right) \sigma(r_t, t) = \hat{\sigma}_t B_t.$$

### 12.4 Valuación neutral al riesgo

La ecuación (12.14) puede ser escrita en forma equivalente como:

$$\tilde{B}_t = \tilde{B}_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}_s d\tilde{W}_s. \quad (12.15)$$

Por lo tanto,  $\tilde{B}_t$  es una  $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingala con respecto de la filtración aumentada  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  definida en el espacio medible original  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Por lo tanto, si  $T \geq t$ ,

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[ \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \tilde{B}_t. \quad (12.16)$$

## 12.5 La regla de Bayes y esperanza condicional bajo la probabilidad equivalente neutral al riesgo

De acuerdo con la sección anterior,  $\tilde{B}_t$  es una martingala en  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \tilde{\mathbb{P}})$ . El teorema de Girsanov proporciona una medida martingala equivalente

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi_T^{(\lambda)} d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}$$

donde  $\varphi_T^{(\lambda)}$  se calcula a partir de un tiempo inicial  $t = 0$ , es decir,

$$\varphi_T^{(\lambda)} = \exp \left\{ - \int_{t=0}^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \lambda_s^2 ds \right\}.$$

Sin embargo, si se tiene información  $\mathcal{F}_t$ , entonces el tiempo inicial no es cero sino  $t$ , en cuyo caso

$$\begin{aligned} \varphi_{T-t}^{(\lambda)} &= \exp \left\{ - \int_t^T \lambda_s ds - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda_s^2 ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_s ds + \int_0^t \lambda_s ds - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda_s^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds \right\} \\ &= \frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $A \in \mathcal{F}_t$ , entonces

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}} d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}_t,$$

En consecuencia

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[ \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{\varphi_t^{(\lambda)}} \mathbb{E} \left[ \varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (12.17)$$

La expresión (12.18) proporciona una fórmula para calcular la esperanza condicional bajo  $\tilde{\mathbb{P}}$ . Note además que si  $A \in \mathcal{F}_t$ , entonces

$$\begin{aligned}
& \int_A \frac{1}{\varphi_t^{(\lambda)}} \mathbb{E} \left[ \varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] d\tilde{\mathbb{P}} \\
&= \mathbb{E} \left[ \varphi_t^{(\lambda)} 1_A \frac{1}{\varphi_t^{(\lambda)}} \mathbb{E} \left[ \varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ 1_A \mathbb{E} \left[ \varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ 1_A \varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \varphi_T^{(\lambda)} 1_A \tilde{B}_T \right] \\
&= \tilde{\mathbb{E}} \left[ 1_A \tilde{B}_T \right] \\
&= \int_A \tilde{B}_T d\tilde{\mathbb{P}}.
\end{aligned}$$

Por último, se verá que si  $0 \leq s \leq t \leq T$ , entonces

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[ \tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_s \right] = \tilde{W}_s. \quad (12.19)$$

De hecho, la verificación del resultado anterior es, fundamentalmente, la demostración del teorema de Girsanov. Considere el producto  $\phi_t = \tilde{W}_t \varphi_t^{(\lambda)}$ , donde por brevedad  $\varphi_t^{(\lambda)} \equiv \varphi^{(\lambda)}(\lambda, t, W_t)$ , es una  $\mathbb{P}$ -martingala. Recuerde que

$$d\tilde{W}_t = \lambda dt + dW_t$$

y

$$d\varphi_t^{(\lambda)} = -\lambda \varphi_t^{(\lambda)} dW_t.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
d(\phi_t) &= d(\tilde{W}_t \varphi_t^{(\lambda)}) \\
&= \tilde{W}_t d\varphi_t^{(\lambda)} + \varphi_t^{(\lambda)} d\tilde{W}_t + (d\tilde{W}_t)(d\varphi_t^{(\lambda)}) \\
&= -\lambda \tilde{W}_t \varphi_t^{(\lambda)} dW_t + \varphi_t^{(\lambda)} \lambda dt + \varphi_t^{(\lambda)} dW_t - \lambda \varphi_t^{(\lambda)} dt \\
&= \varphi_t^{(\lambda)} (1 - \lambda \tilde{W}_t) dW_t \\
&= \varphi_t^{(\lambda)} (1 - \lambda^2 t - \lambda W_t) dW_t.
\end{aligned}$$

Así,  $\phi_t$  es una martingala  $\mathbb{P}$ -martingala, es decir,

$$\mathbb{E} \left[ \phi_t \mid \mathcal{F}_s \right] = \phi_s. \quad (12.20)$$

En virtud de la regla de Bayes, se sigue que

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}} \left[ \tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[ \frac{\varphi_t^{(\lambda)}}{\varphi_s^{(\lambda)}} \tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{1}{\varphi_t^{(\lambda)}} \mathbb{E} \left[ \varphi_t^{(\lambda)} \tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{1}{\varphi_t^{(\lambda)}} \mathbb{E} \left[ \phi_t \mid \mathcal{F}_s \right] \\
&= \frac{\phi_s}{\varphi_t^{(\lambda)}} \\
&= \tilde{W}_s.
\end{aligned} \tag{12.21}$$

## 12.6 El teorema de Girsanov y valuación neutral al riesgo de un bono cupón cero

De acuerdo a la sección anterior  $\tilde{B}_t$  es una  $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingala. En particular, por la regla de Bayes se sigue que

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[ \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \tag{12.22}$$

Recuerde ahora la fórmula de valuación:

$$\tilde{B}_t = \mathbb{E} \left[ \frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \tag{12.23}$$

Dado que  $\tilde{B}_T = 1$ , se sigue que

$$\begin{aligned}
B_t &= \mathbb{E} \left[ \varphi_{T-t}^{(\lambda)} \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds - \int_t^T r_s ds \right\} \mid \mathcal{F}_t \right].
\end{aligned} \tag{12.24}$$

Observe que si el precio de un bono cupón cero se define mediante la hipótesis de expectativas neutrales al riesgo, es decir, si

$$B(t, T) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] = M_t \mathbb{E} \left[ \frac{1}{M_T} \mid \mathcal{F}_t \right], \tag{12.25}$$

entonces el premio al riesgo satisface  $\lambda \equiv 0$ .

### 13. El modelo de Heath, Jarrow y Morton

En esta sección se extiende la metodología Heath, Jarrow y Morton (HJM) para generar curvas de rendimiento con base en precios observados de bonos cupón cero. Para estimar la curva de rendimiento de un bono cupón cero con el modelo de Heath, Jarrow y Morton se puede comenzar con una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa forward y, posteriormente, se determina endógenamente la dinámica estocástica de un bono cupón cero.

#### 13.1 Especificación exógena de la tasa forward instantánea

Considere un movimiento Browniano  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada,  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ . Se supone que la dinámica de la tasa forward,  $f(t, T)$ , se especifica exógenamente por la siguiente ecuación diferencial estocástica con un sólo factor de incertidumbre:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \beta(t, T)dW_t, \quad (13.1)$$

en donde las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  satisfacen, casi seguramente con respecto de  $\mathbb{P}$ , las siguientes propiedades:

$$\int_0^T \left| \frac{\partial^k}{\partial T^k} \alpha(s, T) \right| ds < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^T \left| \frac{\partial^k}{\partial T^k} \beta(s, T) \right|^2 ds < \infty,$$

para  $k = 0, 1$ . En este caso,  $\partial^0 \alpha(s, T) / \partial T^0 \equiv \alpha(s, T)$  y  $\partial^0 \beta(s, T) / \partial T^0 \equiv \beta(s, T)$ . Asimismo, se supone que el precio de un bono cupón cero está dado por

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\} \quad (13.2)$$

en donde la integral en (13.2) permanece finita y  $\mathcal{F}_t$  es la información relevante hasta el tiempo  $t$ . En este caso, se determina endógenamente el proceso  $B(t, T)$  que haga consistentes los supuestos (13.1) y (13.2).

#### 13.2 Dinámica estocástica de la tasa spot

A partir de (13.1), se sigue que

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \beta(s, T) dW_s. \quad (13.3)$$

Por lo tanto, la tasa corta, es decir, la tasa forward instantánea, satisface

$$r_t = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds + \int_0^t \beta(s, t) dW_s. \quad (13.4)$$

De esta manera,

$$E[r_t|\mathcal{F}_t] = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t)ds$$

y

$$Var[r_t|\mathcal{F}_t] = \int_0^t \beta^2(s, t)ds.$$

En consecuencia,

$$dr_t = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t}dt + \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t \alpha(s, t)ds \right) dt + \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t \beta(s, t)dW_s \right) dt. \quad (13.5)$$

A continuación se calculan las derivadas parciales de las integrales del lado derecho de la ecuación (13.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t \alpha(s, t)ds \right) dt = \left( \alpha(t, t) + \int_0^t \frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial t} ds \right) dt$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t \beta(s, t)dW_s \right) dt = \beta(t, t)dW_t + \left( \int_0^t \frac{\partial \beta(s, t)}{\partial t} dW_s \right) dt.$$

De esta manera, (13.5) puede reexpresarse como

$$dr_t = \left( \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \alpha(t, t) + \int_0^t \frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial t} ds + \int_0^t \frac{\partial \beta(s, t)}{\partial t} dW_s \right) dt + \beta(t, t)dW_t. \quad (13.6)$$

Esta ecuación determina el comportamiento de la tasa instantánea de interés. A continuación, se encuentra la ecuación diferencial estocástica que conduce la dinámica del precio del bono.

### 13.3 Dinámica estocástica del precio del bono

Dada la especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa forward instantánea, el objetivo de esta sección es determinar endógenamente el precio del bono  $B(t, T)$  que haga consistentes los supuestos (13.1) y (13.2). Sea

$$I(t, T) = - \int_t^T f(t, s)ds. \quad (13.7)$$

En este caso, la regla de Leibnitz produce el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} dI(t, T) &= -d \left( \int_t^T f(t, s)ds \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_t^T f(t, s)ds \right) dt \\ &= - \int_t^T \left( \frac{\partial f(t, s)}{\partial t} dt \right) ds + f(t, t)dt \\ &= - \int_t^T df(t, s)ds + f(t, t)dt. \end{aligned} \quad (13.8)$$

La sustitución de (13.1) en (13.8) y el hecho de que  $f(t, t) = r_t$  conducen a

$$\begin{aligned} dI(t, T) &= - \int_t^T \alpha(t, s) ds dt - \int_t^T \beta(s, t) ds dW_t + r_t dt \\ &= \left( r_t - \int_t^T \alpha(t, s) ds \right) dt - \left( \int_t^T \beta(t, s) ds \right) dW_t. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Si se denota la tendencia de  $I(t, T)$  mediante

$$U(t, T, r_t) = r_t - \int_t^T \alpha(t, s) ds$$

y la volatilidad de  $I(t, T)$  por

$$V(t, T) = - \int_t^T \beta(t, s) ds,$$

se sigue que

$$dI(t, T) = U(t, T, r_t) dt + V(t, T) dW_t. \quad (13.10)$$

Note ahora que

$$B(t, T) = G(I(t, T)) \quad \text{con} \quad G(I(t, T)) = \exp\{I(t, T)\}.$$

En consecuencia, el lema de Itô aplicado a  $G$  con respecto al proceso (2, 10) conduce a

$$\begin{aligned} dB &= \left( \frac{\partial G}{\partial I} U + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial I^2} V^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial I} V dW_t \\ &= (GU + \frac{1}{2}GV^2) dt + GV dW_t \\ &= B (U + \frac{1}{2}V^2) dt + BV dW_t. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= \left[ r_t - \int_t^T \alpha(t, s) ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^T \beta(t, s) ds \right)^2 \right] B(t, T) dt \\ &\quad - \left( \int_t^T \beta(t, s) ds \right) B(t, T) dW_t \end{aligned} \quad (13.11)$$

El marco teórico de HJM, representado por las ecuaciones (13.1), (13.5) y (13.11), describe por completo los comportamientos de la tasa forward instantánea, de la tasa corta y del precio del bono. Es necesario ahora moverse al mundo neutral de riesgo para llevar a cabo el proceso de valuación.

### 13.4 Inversión del proceso tasa forward-precio del bono

A partir de la especificación exógena de la tasa forward en (13.1), se obtuvo la dinámica del precio del bono cupón cero en (13.11). En esta sección se lleva a cabo el proceso inverso, es decir, dada la especificación de la dinámica estocástica del precio de un bono cupón cero, se determina la tasa forward. Esto es posible debido a que la definición del precio del bono, expresada en (13.2), es invertible. Si el proceso para  $B(t, T)$  tiene la forma

$$dB(t, T) = \mu(t, T)B(t, T)dt + \nu(t, T)B(t, T)dW_t$$

con

$$\mu(t, T, r_t) = r_t - \int_t^T \alpha(t, s)ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^T \beta(t, s)ds \right)^2$$

y

$$\nu(t, T) = - \int_t^T \beta(t, s)ds, \quad \nu(t, t) = 0,$$

y si se utiliza el Lema de Itô, en la función  $H = -\ln B$ , se tiene que

$$\begin{aligned} dH &= \left( -\frac{1}{B}\mu B + \frac{1}{2B^2}B^2\nu^2 \right) dt - \frac{1}{B}\nu B dW_t \\ &= \left( -\mu + \frac{1}{2}\nu^2 \right) dt - \nu dW_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} df(t, T) &= d \left( -\frac{\partial}{\partial T} \ln B \right) = \frac{\partial}{\partial T} d(-\ln B) \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left( -\mu + \frac{1}{2}\nu^2 \right) dt - \nu_T dW_t \\ &= \alpha(t, T)dt + \beta(t, T)dW_t. \end{aligned}$$

Esta ecuación coincide plenamente con (13.1).

### 13.5 Valuación neutral al riesgo en el modelo HJM

Considere un portafolio con dos bonos con vencimientos diferentes,  $T_1$  y  $T_2$ . El valor del portafolio, en el tiempo  $t$ , con  $w_1$  unidades del bono de vencimiento  $T_1$  y  $w_2$  unidades del bono con vencimiento  $T_2$  está dado por:

$$\Pi_t = w_1 B(t, T_1) + w_2 B(t, T_2). \quad (13.12)$$

El cambio en el valor del portafolio por fluctuaciones propias del mercado satisface

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= w_1 dB(t, T_1) + w_2 dB(t, T_2) \\ &= w_1 \left[ \left( U(t, T_1, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_1) \right) B(t, T_1)dt + V(t, T_1)B(t, T_1)dW_t \right] \\ &\quad + w_2 \left[ \left( U(t, T_2, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_2) \right) B(t, T_2)dt + V(t, T_2)B(t, T_2)dW_t \right] \\ &= \left[ w_1 \left( U(t, T_1, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_1) \right) B(t, T_1)dt \right. \\ &\quad \left. + w_2 \left( U(t, T_2, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_2) \right) B(t, T_2)dt \right] \\ &\quad \left[ w_1 V(t, T_1)B(t, T_1) + w_2 V(t, T_2)B(t, T_2) \right] dW_t. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Si se escogen  $w_1 = 1$  y

$$w_2 = -\frac{V(t, T_1)B(t, T_1)}{V(t, T_2)B(t, T_2)}, \quad (13.14)$$

entonces el portafolio se encuentra cubierto contra el riesgo de mercado. Por lo tanto,

$$d\Pi_t = \left( U(t, T_2, r_t) + \frac{1}{2}U(t, T_2, r_t)^2 - \frac{U(t, T_2, r_t) + \frac{1}{2}U(t, T_2, r_t)^2}{V(t, T_2)}V(t, T_1) \right) B(t, T_1)dt. \quad (13.15)$$

Si, por otro lado, existe un mercado de crédito en donde los agentes pueden prestar y pedir prestado a la tasa spot  $r_t$ , también llamada tasa corta o tasa instantánea (la tasa de interés de plazo más pequeño disponible en el mercado), se sigue que

$$d\Pi_t = \Pi_t r_t dt = \left( 1 - \frac{V(t, T_1)}{V(t, T_2)} \right) r_t B(t, T_1) dt. \quad (13.16)$$

Después de igualar (13.15) con (13.16), se sigue que

$$\frac{U(t, T_1, r_t) + \frac{1}{2}V(t, T_1)^2 - r_t}{V(t, T_2)} = \frac{U(t, T_2, r_t) + \frac{1}{2}V(t, T_2)^2 - r_t}{V(t, T_2)}. \quad (13.17)$$

Los cocientes anteriores son independientes de la fecha de vencimiento. Es decir, el lado izquierdo de la igualdad en (13.17) sólo depende de  $T_1$  y el derecho sólo depende de  $T_2$ . Por lo tanto, se puede escribir

$$\lambda(t, r_t) = \frac{U(t, T, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T) - r_t}{V(t, T)}. \quad (13.18)$$

La función  $\lambda(t, r_t)$  es el premio al riesgo asociado al factor de incertidumbre  $dW_t$ . En un mundo neutral al riesgo  $\lambda(t, r_t) \equiv 0$ . En consecuencia, el supuesto de neutralidad al riesgo en el modelo HJM conduce a:

$$U(t, T, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T) = r_t.$$

Equivalentemente,

$$r_t - \int_t^T \alpha(t, s) ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^T \beta(t, s) ds \right)^2 = r_t,$$

lo cual implica

$$\int_t^T \alpha(t, s) ds = \frac{1}{2} \left( \int_t^T \beta(t, s) ds \right)^2. \quad (13.19)$$

Después de derivar la expresión anterior

$$\alpha(t, T) = \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s) ds. \quad (13.20)$$

En otras palabras, el retorno de cualquier inversión realizada en un mundo neutral al riesgo es simplemente  $r_t$ . Por lo tanto, la ecuación del precio del bono (13.11), bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, se transforma en

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= r_t B(t, T) dt - \left( \int_t^T \beta(t, s) ds \right) B(t, T) dW_t \\ &= r_t B(t, T) dt - \frac{\alpha(t, T)}{\beta(t, T)} B(t, T) dW_t. \end{aligned} \quad (13.21)$$

La componente determinista de la ecuación anterior implica crecimiento exponencial en el precio del bono con tendencia igual a la tasa spot.

De la misma manera, la ecuación diferencial estocástica que gobierna la dinámica de la tasa forward instantánea, bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, toma ahora la forma:

$$df(t, T) = \left( \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s) ds \right) dt + \beta(t, T) dW_t. \quad (13.22)$$

### 13.6 Inversión del proceso tasa forward-precio del bono en un mundo neutral al riesgo

Si se considera, ahora el proceso  $B(t, T)$  bajo el supuesto de neutralidad al riesgo en (13.21), se tiene que

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= r_t B(t, T) dt - \left( \int_t^T \beta(t, s) ds \right) dW_t \\ &= r_t B(t, T) dt + \nu(t, T) dW_t. \end{aligned} \quad (13.23)$$

El Lema de Itô, en la función  $H = -\ln B$  conduce a

$$\begin{aligned} dH &= \left( -\frac{1}{B} r_t B + \frac{1}{2B^2} B^2 \nu^2 \right) dt - \frac{1}{B} \nu B dW_t \\ &= \left( -r_t + \frac{1}{2} \nu^2 \right) dt - \nu dW_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} df(t, T) &= d \left( -\frac{\partial}{\partial T} \ln B \right) = \frac{\partial}{\partial T} d(-\ln B) \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left( -r_t + \frac{1}{2} \nu^2 \right) dt - \nu_T dW_t \\ &= \alpha(t, T) dt + \beta(t, T) dW_t. \end{aligned}$$

Dado que

$$\alpha(t, T) = \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s) ds,$$

se tiene, a partir de (13.1), que

$$\begin{aligned} df &= \alpha(t, T)dt + \beta(t, T)dW_t \\ &= \left( \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s) ds \right) dt + \beta(t, T)dW_t. \end{aligned}$$

### 13.7 Estimación de la curva de rendimiento

Se propone para la volatilidad de la tasa forward una forma funcional de la forma  $\beta(t, T) = \bar{\beta}(T - t)$ , de tal manera que  $\bar{\beta}(T - t)$  es la volatilidad de la tasa forward para cada plazo  $T - t$ . A fin de estimar la curva de rendimiento a través de la metodología HJM, se supone también la siguiente forma funcional de la volatilidad de la tasa forward:

$$\beta(t, T) = \sigma \exp\{-\lambda(T - t)\}. \quad (13.24)$$

La tasa forward discreta  $f(t, T_1, T_2)$  puede ser relacionada con los precios de los bonos cupón cero mediante

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln B(t, T_1) - \ln B(t, T_2)}{T_2 - T_1} \quad (13.25)$$

Si se aplica el lema de Itô a  $\ln[B(t, T)]$  con base en (13.23), se tiene que

$$d \ln[B(t, T_1)] = \left[ r_t - \frac{\nu(t, T_1)}{2} \right] dt + \nu(t, T_1)dW_t \quad (13.26)$$

y

$$d \ln[B(t, T_2)] = \left[ r_t - \frac{\nu(t, T_2)}{2} \right] dt + \nu(t, T_2)dW_t. \quad (13.27)$$

La sustitución de (13.26) y (13.27) en (13.25) implica que

$$df(t, T_1, T_2) = \frac{v(t, T_2)^2 - v(t, T_1)^2}{2(T - T_1)} dt + \frac{v(t, T_1)^2 - v(t, T_1)^2}{T - T_1} dW_t \quad (13.28)$$

Si se considera la tendencia y volatilidad  $\alpha(t, T)$  y  $\beta(t, T)$ , respectivamente, de la tasa forward en un mundo neutral al riesgo, se tiene que

$$\alpha(t, T) = \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s) ds.$$

Por lo tanto,

$$df(t, T) = \left( \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s) ds \right) dt + \beta(t, T)dW_t.$$

Equivalentemente, de (13.1), se tiene que

$$df(t, T) = v(t, T)v_T(t, T)dt - v_T(t, T)dW_t. \quad (13.29)$$

Se considera ahora la tasa corta

$$r_t = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t df(s, t),$$

se tiene de (13.29) que

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t v(s, t)v_t(s, t)ds + \int_0^t v_t(s, t)dW_s. \quad (13.30)$$

La diferencial de (13.30) y el hecho de que  $v(t, t) = 0$ , conducen ahora a:

$$dr_t = f_t(0, t)dt + \left\{ \int_0^t [v(s, t)v_{tt}(s, t) + v_t(s, t)^2]ds \right\} dt + \left\{ \int_0^t [v_{tt}(s, t)dW_s] \right\} dt + [v_t(t, t)]dW_t.$$

Observe que la tendencia de la tasa corta,  $r_t$ , es la pendiente de la tasa forward inicial. El segundo y el tercer términos pueden conducir a que el proceso de  $r_t$  no sea Markoviano

### 13.8 Versión discreta del modelo HJM

A continuación se considera una versión discreta del modelo HJM. Se examina el proceso de tasas forward en periodos de longitud  $\Delta t$ , en lugar del proceso de tasas forward instantáneas. Se definen  $a_{i,j}$  y  $b_{i,j}$  como la tendencia y la desviación estándar, respectivamente, del proceso discretizado de la tasa forward entre los tiempos  $j\Delta t$  y  $j\Delta t + i\Delta t$  vista al tiempo  $i\Delta t$ . Por lo tanto, la versión discreta de (13.1) está dada por:

$$df(t, j\Delta t, j\Delta t + i\Delta t) = a_{i,j}dt + b_{i,j}dW_t$$

cuando  $t = i\Delta t$ . Dado que

$$v_{i,j} \approx \frac{v_{i,j+1} + v_{i,j}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\Delta v_{i,j}}{\Delta t} \approx \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{2\Delta t}$$

se tienen

$$a_{i,j} = v_{i,j} \frac{\Delta v_{i,j}}{\Delta t} = \frac{v_{i,j+1}^2 + v_{i,j}^2}{2\Delta t} \quad \text{y} \quad b_{i,j} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta t},$$

donde  $\nu_{i,j}$  es el valor de  $\nu(t, T)$  cuando  $t = i\Delta t$  y  $T = j\Delta t$ . Dado que  $\nu_{i,i} = 0$ , se sigue que

$$\sum_{j=1}^k m_{i,j} = \frac{1}{2}\Delta t \left( \sum_{j=1}^k s_{i,j} \right)^2. \quad (13.31)$$

### 13.9 Simulación Monte Carlo de HJM

El método de simulación Monte Carlo puede utilizarse para estimar el modelo HJM. El periodo de tiempo sobre el cual la simulación se lleva a cabo está dividido en  $n$  subintervalos de la misma longitud,  $\Delta t$ . De esta manera, la versión discreta de (13.1) consiste en

$$f_{i+1,j} - f_{i,j} = a_{i,j}\Delta t + b_{i,j}\varepsilon\sqrt{\Delta t}. \quad (13.32)$$

donde  $f_{i,j}$  denota a  $f(i\Delta t, j\Delta t, j\Delta t + i\Delta t)$ , esto es,  $f_{i,j}$  es la tasa forward entre los periodos  $j\Delta t$  y  $(j+1)\Delta t$  vista al tiempo  $i\Delta t$ . Se supone que la variable aleatoria  $\varepsilon$  tiene distribución normal estándar. Los valores  $a_{i,j}$  pueden calcularse a partir de los valores de  $b_{i,j}$  a partir de (13.31). Asimismo, al tiempo  $i\Delta t$ , se almacenan los precios de los bonos que se tienen en el vencimiento  $j\Delta t$  para  $i+1 \leq j \leq n$ . Por otro lado, la ecuación (13.21) se transforma en

$$B_{i+1,j} = B_{i,j} \left( \frac{1}{B_{i,i+1}} + v_{i,j}\varepsilon\sqrt{\Delta t} \right). \quad (13.33)$$

donde  $B_{i,j}$  es el precio al tiempo  $i\Delta t$  de un bono con vencimiento al tiempo  $j\Delta t$ . Con base en las fórmulas (13.31) y (13.32), el cuadro 2 muestra el árbol no recombinable de la tasa forward  $f_{i,j}$  entre el 31 de diciembre de 2001 y el 30 de junio de 2002 en períodos quincenales. La curva estimada de rendimiento con CETES de diferentes plazos entre el 31 de diciembre de 2001 al 30 de junio de 2002, se calcula mediante (13.33) y  $R(t, T) = -\ln B(t, T)/(T - t)$ .

							0.01742
						0.01724	
					0.01718		0.01756
				0.01708		0.01723	
			0.01679		0.01718		0.01763
		0.01679		0.01714		0.01721	
	0.01644		0.01704		0.01719		0.01775
0.01624		0.01676		0.01711		0.01731	
	0.01649		0.01709		0.01721		0.01773
		0.01657		0.01715		0.01731	
			0.01711		0.01719		0.01796
				0.01712		0.01731	
					0.01721		0.17899
						0.01738	
							0.01799

Cuadro 13.1 Árbol no recombinable de la tasa forward  $f_{i,j}$  entre el 31 de diciembre de 2001 y el 30 de junio de 2002 en períodos quincenales.

## 14. Ecuación de compensación de un portafolio combinado de futuros y flujos

En esta sección se presenta la ecuación de compensación entre futuros y flujos de efectivo. Como antes, vamos a denotar al precio de un contrato a futuro de un bono cupón cero mediante  $V(r_t, t; T)$ .

### 14.1 Ecuación de compensación de un portafolio combinado

Para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo, se utilizarán cuatro contratos a futuro con vencimientos  $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$ , con  $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ . La razón por la que se eligen únicamente cuatro contratos a futuro con distintos vencimientos se justificará más adelante. Así pues, el precio del contrato a futuro con vencimiento  $T_i$  tiene precio  $V_i(r_t, t; T_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , donde  $r_t = f(t, t)$ . Considere una estrategia de cobertura con  $x_i$  unidades de cada contrato a futuro con vencimiento en  $T_i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ . Sea  $u(r, t, \Phi)$  el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ , cada uno de los cuales se presenta en una fecha preestablecida  $t_l, l = 1, 2, \dots, n$ . Se desea determinar las cantidades  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  de tal manera que los cambios en el valor presente de  $\Phi$ ,  $u(r, t, \Phi)$ , por variaciones en la tasa de interés se compensen con los flujos generados por contratos a futuro de distintos vencimientos, es decir,  $0 = x_1 dV_1 + x_2 dV_2 + x_3 dV_3 + x_4 dV_4 - du$ . Por lo tanto,

$$0 = x_1 dV_1 + x_2 dV_2 + x_3 dV_3 + x_4 dV_4 - du. \quad (14.1)$$

En este caso,

$$u(r_t, t; \Phi) = E \left\{ \sum_{l=1}^n \phi_l \exp\{R(t, t_l; r_t)(t_l - t)\} \middle| \mathcal{F}_t \right\}, \quad (14.2)$$

donde el flujo  $\phi_l$  se presenta en una fecha preestablecida  $t_l, l = 1, 2, \dots, n$ . Si  $\phi_l > 0$ , se trata de un activo; en caso contrario es un pasivo. El riesgo por fluctuaciones adversas en la tasa de interés que enfrentan las tesorerías de corporativos se refleja en la posibilidad de que el valor presente de los flujos, activos y pasivos, que se tienen planeados no se presente en la magnitud que se esperaba, lo que afecta la programación de las decisiones de operación, inversión y financiamiento. Este riesgo puede reducirse, si se cubre adecuadamente el valor presente de los flujos esperados tomando posiciones en contratos a futuro sobre bonos cupón cero.

Si  $du < 0$ , por lo menos un  $dV_i$  es positivo y, recíprocamente, si  $du > 0$ , por lo menos un  $dV_i$  es negativo. Una simple aplicación del Lema de Itô a  $V_i(r_t, t; T_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , y a  $u(r, t; \Phi)$  conduce a:

$$\begin{aligned}
0 &= x_1 dV_1 + x_2 dV_2 + x_3 dV_3 + x_4 dV_4 - du \\
&= x_1 \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \alpha(t, t) \frac{\partial V_1}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(t, t)^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} \right) dt + \beta(t, t) \frac{\partial V_1}{\partial r_t} dW_t \right] \\
&+ x_2 \left[ \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha(t, t) \frac{\partial V_2}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(t, t)^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r_t^2} \right) dt + \beta(t, t) \frac{\partial V_2}{\partial r_t} dW_t \right] \\
&+ x_3 \left[ \left( \frac{\partial V_3}{\partial t} + \alpha(t, t) \frac{\partial V_3}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(t, t)^2 \frac{\partial^2 V_3}{\partial r_t^2} \right) dt + \beta(t, t) \frac{\partial V_3}{\partial r_t} dW_t \right] \\
&+ x_4 \left[ \left( \frac{\partial V_4}{\partial t} + \alpha(t, t) \frac{\partial V_4}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(t, t)^2 \frac{\partial^2 V_4}{\partial r_t^2} \right) dt + \beta(t, t) \frac{\partial V_4}{\partial r_t} dW_t \right] \\
&- \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t, t) \frac{\partial u}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(t, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r_t^2} \right) dt + \beta(t, t) \frac{\partial u}{\partial r_t} dW_t.
\end{aligned}$$

Reagrupando términos en  $dt$  y  $dW_t$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= \left( x_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} + x_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} + x_3 \frac{\partial V_3}{\partial t} + x_4 \frac{\partial V_4}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt \\
&+ \left( x_1 \frac{\partial V_1}{\partial r_t} + x_2 \frac{\partial V_2}{\partial r_t} + x_3 \frac{\partial V_3}{\partial r_t} + x_4 \frac{\partial V_4}{\partial r_t} - \frac{\partial u}{\partial r_t} \right) dr_t \\
&+ \frac{1}{2} \beta(t, t)^2 \left( x_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} + x_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r_t^2} + x_3 \frac{\partial^2 V_3}{\partial r_t^2} + x_4 \frac{\partial^2 V_4}{\partial r_t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r_t^2} \right) dt.
\end{aligned} \tag{14.3}$$

Esta ecuación es fundamental para generar estrategias de cobertura con contratos a futuro sobre bonos cupón cero, como se verá en las siguientes secciones, pues contiene información sobre el tiempo promedio en que se presentan flujos de efectivo o se realizan pagos de contratos a futuro sobre los bonos, así como información de la dispersión de dichos tiempos con respecto al tiempo promedio.

## 15. Inmunización por duración y convexidad

En esta sección se presenta un procedimiento para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos financieros con contratos a futuro sobre bonos cupón cero. El modelo emplea los conceptos de duración y convexidad útiles en la medición y el control del riesgo por desplazamientos paralelos y moderados en la tasa de interés. A partir de puntos del mercado de CETES, se generan curvas de rendimiento con el modelo de Heath, Jarrow y Morton (1992). A continuación se desarrolla un método de cobertura del valor presente de un conjunto de flujos de efectivo. Dado que  $dt$  y  $dr_t$ , son variables independientes, de la sección anterior se sigue que

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} + x_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} + x_3 \frac{\partial V_3}{\partial t} + x_4 \frac{\partial V_4}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \\ x_1 \frac{\partial V_1}{\partial r_t} + x_2 \frac{\partial V_2}{\partial r_t} + x_3 \frac{\partial V_3}{\partial r_t} + x_4 \frac{\partial V_4}{\partial r_t} = \frac{\partial u}{\partial r_t}, \\ x_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} + x_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r_t^2} + x_3 \frac{\partial^2 V_3}{\partial r_t^2} + x_4 \frac{\partial^2 V_4}{\partial r_t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r_t^2}, \end{cases} \quad (15.1)$$

El sistema (15.1) puede reescribirse como:

$$\begin{cases} w_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} \frac{1}{V_1} + w_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} \frac{1}{V_2} + w_3 \frac{\partial V_3}{\partial t} \frac{1}{V_3} + w_4 \frac{\partial V_4}{\partial t} \frac{1}{V_4} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{1}{u}, \\ w_1 \left( -\frac{\partial V_1}{\partial r_t} \frac{1}{V_1} \right) + w_2 \left( -\frac{\partial V_2}{\partial r_t} \frac{1}{V_2} \right) + w_3 \left( -\frac{\partial V_3}{\partial r_t} \frac{1}{V_3} \right) + w_4 \left( -\frac{\partial V_4}{\partial r_t} \frac{1}{V_4} \right) \\ = \left( -\frac{\partial u}{\partial r_t} \frac{1}{u} \right) \\ w_1 \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial r_t^2} \frac{1}{V_1} \right) + w_2 \left( \frac{\partial^2 V_2}{\partial r_t^2} \frac{1}{V_2} \right) + w_3 \left( \frac{\partial^2 V_3}{\partial r_t^2} \frac{1}{V_3} \right) + w_4 \left( \frac{\partial^2 V_4}{\partial r_t^2} \frac{1}{V_4} \right) \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial r_t^2} \frac{1}{u}, \end{cases} \quad (15.2)$$

donde  $w_i = x_i V_i / u$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Note que  $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$ . Ahora bien, la duración y convexidad del contrato a futuro sobre el bono  $i$  están dadas, respectivamente, por

$$D_i = -\frac{\partial V_i}{\partial r_t} \frac{1}{V_i} \quad \text{y} \quad C_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial r_t^2} \frac{1}{V_i}.$$

Si además se define la sensibilidad relativa del precio del contrato a futuro sobre el bono con respecto del tiempo mediante

$$A_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} \frac{1}{V_i},$$

entonces el sistema (15.2) en las incógnitas  $w_1, w_2, w_3$  y  $w_4$  es equivalente a:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1, \\ w_1 A_1 + w_2 A_2 + w_3 A_3 + w_4 A_4 = A_u, \\ w_1 D_1 + w_2 D_2 + w_3 D_3 + w_4 D_4 = D_u, \\ w_1 C_1 + w_2 C_2 + w_3 C_3 + w_4 C_4 = C_u. \end{cases} \quad (15.3)$$

En todo lo que sigue, se supondrá que el determinante asociado al sistema (15.3) es distinto de cero a fin de garantizar soluciones no triviales. Los valores  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  que se determinan a través de  $w_1, w_2, w_3$  y  $w_4$  definen una estrategia de cobertura. Como puede observarse, la inmunización por duración y convexidad es fundamentalmente un método local diseñado para cubrir cambios en el valor presente debido a desplazamientos, pequeños y moderados, en la tasa de interés. Por esta razón, las estrategias de inmunización requieren de actualizaciones periódicas o rebalanceo a fin de proteger eficazmente no sólo contra pequeños desplazamientos en tasas, sino también contra cambios moderados y extremos. Si una estrategia no es rebalanceada atendiendo al comportamiento y a las expectativas del mercado, la protección se deteriora progresivamente.

## 16. Medición del valor en riesgo

Una vez que se han determinado las soluciones locales del problema de inmunización, las estrategias de cobertura se evalúan en términos globales, es decir, en términos de las variaciones de mercado de la tasa de interés en el escenario del último año. A partir de un registro histórico de la estructura de plazos de la tasa de interés de CETES, se genera la distribución del valor presente de un conjunto de flujos financieros con y sin cobertura.

### 16.1 Distribución global del valor presente de un conjunto de flujos esperados

En esta sección se obtienen las distribuciones empíricas de un conjunto de flujos financieros con y sin inmunización, y se comparan los efectos en la varianza y en el valor en riesgo a niveles predeterminados de probabilidad. En primer lugar, se llevará a cabo un análisis estadístico del comportamiento histórico de la curva de rendimiento a fin de obtener la distribución del valor presente de un conjunto dado de flujos financieros. Considere, como antes, un conjunto de flujos esperados, tanto de pasivos como de activos,  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  en fechas preestablecidas  $t_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ . Suponga que se cuenta con una muestra  $\Phi$  de curvas de rendimiento generadas con la metodología de Heath, Jarrow y Morton. El valor presente de los flujos financieros,  $\Phi$  con la tasa de la  $j$ -ésima curva de rendimiento se denotará por  $u_j(\Phi)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Si  $\Phi$  es pensado como un conjunto de posibles escenarios (estados de la naturaleza), entonces  $\{u_1(\Phi), \dots, u_j(\Phi), \dots, u_m(\Phi)\}$  puede verse como una muestra proveniente de la distribución del valor presente de  $\Phi$ , denotado por  $u(\Phi)$ . La distribución empírica de  $u(\Phi)$  se define para cualquier  $x \in (-\infty, \infty)$  como:

$$G_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < u_{(1)}(\Phi), \\ \frac{k}{m}, & \text{si } u_{(k)}(\Phi) \leq x < u_{(k+1)}(\Phi) \quad (k = 1, 2, \dots, l, \dots, m-1), \\ 1, & \text{si } x \geq u_{(m)}(\Phi), \end{cases} \quad (16.1)$$

donde

$$u_{(1)}(\Phi), \dots, u_{(j)}(\Phi), \dots, u_{(m)}(\Phi)$$

son las estadísticas de orden de la muestra

$$\{u_1(\Phi), \dots, u_2(\Phi), \dots, u_m(\Phi)\},$$

*i.e.*, los valores muestrales ordenados en forma creciente. El percentil (o cuantil de orden  $p$ ) de  $u(\Phi)$ , denotado por  $x_p$ , se define mediante:

$$p \leq G_m(x_p) \leq p + \mathbb{P}_G\{u(\Phi) = x_p\}. \quad (16.2)$$

La distribución empírica permite calcular la probabilidad de que el valor presente de nuestros flujos tome valores menores que un cierto percentil, lo cual es útil para establecer regiones de riesgo con cierto nivel de confianza. Es decir, dentro del contexto de la metodología del valor en riesgo y construyendo una distribución empírica, podemos calcular el valor en riesgo de nuestro portafolio (flujos de activos y pasivos) para variaciones diarias de las tasas, con un cierto nivel de confianza

## 16.2 Distribución global del valor presente de un conjunto de flujos esperados cubiertos con bonos cupón cero

Una vez que hemos calculado el número de bonos para cada vencimiento, como soluciones locales, se determina la distribución del valor presente de un conjunto de flujos esperados incorporando bonos cupón cero; a fin de evaluar las soluciones globalmente y cuantificar el riesgo de este portafolio ampliado con la incorporación de bonos. Considere un conjunto de flujos financieros,  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  en fechas preestablecidas  $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots, t_n$ . Suponga, además, que se cuenta con una muestra de curvas de rendimiento. Entonces, el valor presente de los flujos financieros incluyendo los bonos que inmunizan dichos flujos con la estructura de plazos asociada al  $j$ -ésimo elemento de la muestra, con fechas de vencimiento  $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$ , respectivamente, se denota por  $u_j(\Phi, V)$ . En este caso, la distribución empírica de  $u(\Phi, V)$  se define para cualquier  $z \in (-\infty, \infty)$  como:

$$H_m(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < u_{(1)}(\Phi, V), \\ \frac{k}{n}, & \text{si } u_{(k)}(\Phi, V) \leq z < u_{(k+1)}(\Phi, V) \quad (k = 1, 2, \dots, l, \dots, n-1), \\ 1, & \text{si } z \geq u_{(n)}(\Phi, V), \end{cases} \quad (16.3)$$

donde

$$u_{(1)}(\Phi, V), \dots, u_{(j)}(\Phi, V), \dots, u_{(n)}(\Phi, V)$$

son las estadísticas de orden de la muestra

$$\{u_1(\Phi, V), \dots, u_2(\Phi, V), \dots, u_n(\Phi, V)\},$$

*i.e.*, son los valores muestrales ordenados en forma creciente. El percentil (o cuantil de orden  $p$ ) de  $u(\Phi, V)$ , denotado por  $z_p$ , se define mediante:

$$p \leq H_m(z_p) \leq p + \mathbf{IP}_H\{u(\Phi, V) = z_p\}. \quad (16.4)$$

## 17. Ilustración del método de cobertura propuesto

Uno de los métodos más utilizados en la medición de riesgos de mercado es el de valor en riesgo (VeR) (Jorion, 1999). En la metodología propuesta se genera la distribución de pérdidas potenciales. Esta distribución se utiliza para estimar intervalos de confianza de posibles pérdidas con cierto grado de confianza estadística y en un plazo determinado. En esta sección, estamos interesados en analizar pérdidas potenciales en el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo, a través de un registro histórico de curvas de rendimiento.

A continuación se ilustra el método propuesto de inmunización global para un conjunto de flujos de efectivo. Los objetivos específicos de este ejercicio son: 1) medir el riesgo a partir de métodos locales (para cambios pequeños en tasas de interés); 2) analizar cómo cambios adversos en la tasa de interés afectan el valor presente de los flujos; 3) presentar varias estrategias con contratos a futuro sobre bonos cupón cero que inmunizan los riesgos de un conjunto de flujos; y 4) evaluar las distintas estrategias con el fin de seleccionar la más adecuada para cubrir los flujos de efectivo.

En el siguiente ejercicio, a partir de un registro histórico de la estructura de plazos CETES, se genera la distribución del valor presente de los flujos financieros. Posteriormente, con referencia a la curva de rendimientos más reciente se determinan la duración y convexidad monetaria del valor presente de dichos flujos y se calculan las cantidades de contratos a futuro sobre bonos cupón cero que lo inmunizan. Estas cantidades, junto con los precios de los contratos a futuro, se utilizan para generar la distribución conjunta de los flujos financieros y de los flujos propios de los contratos a futuro sobre bonos.

Asimismo, se comparan las varianzas de las distribuciones empíricas de los flujos financieros con y sin contratos a futuro, con el fin de analizar el efecto que en términos de reducción de riesgos tiene la incorporación de contratos a futuro en nuestro portafolio de activos y pasivos. En la Tabla 1 se presenta un conjunto de flujos financieros dados, así como las fechas de vencimiento de los contratos a futuro. La muestra de curvas de rendimiento que se consideró es del 31 de diciembre de 2001 al 30 de junio de 2002.

Fechas de flujos	Montos de flujos	Vencimientos de los contratos			
		1 Futuro = 1 lote de 10,000 CETES			
31-Dic-01	910,000	10-Dic-01		Análisis histórico	
		$\rightarrow x_1 = -5.90$			
31-Ene-02	-950,000	10-Ene-02		c/futuros	s/futuros
		$x_2 = 6.24$			
31-Mar-02	1,000,000	10-Mar-02	$\mu$	19,567.17	-9,222.72
		$x_3 = -6.05$			
30-Jun-02	-930,000	10-Jun-02	$\sigma$	389.11	27,112.2
		$x_4 = 8.11$			
		20-Dic-01		Análisis histórico	
		$\rightarrow x_1 = -10.02$			
		20-Feb-02		c/futuros	s/futuros
		$x_2 = 6.24$			
		20-Mar-02	$\mu$	18,452.89	-9,444.62
		$x_3 = -6.55$			
		20-Jun-02	$\sigma$	5,117.80	28,279.4
		$x_4 = 2.17$			
		29-Dic-01		Análisis histórico	
		$\rightarrow x_1 = -15.52$			
		29-Ene-02		c/futuros	s/futuros
		$x_2 = 16.29$			
		29-Feb-02	$\mu$	21,025.67	-9,444.62
		$x_3 = -9.75$			
		29-Jun-02	$\sigma$	9,101.41	28,279.4
		$x_4 = 8.27$			

Cuadro 17.1 Flujos de efectivo, vencimientos de bonos y estrategias de cobertura

Como puede observarse, en la Tabla 1, las fechas preestablecidas de los flujos de efectivo no coinciden con las fechas de vencimiento de los contratos a futuro de CETES. Después de igualar la duración monetaria y la convexidad monetaria de cuatro contratos a futuro con diferentes vencimientos con la duración monetaria y la convexidad monetaria de los flujos financieros, se obtienen las cantidades de contratos que inmunizan los flujos. La Tabla 17.1 muestra los resultados del método histórico.

Observe que para la estrategia con fechas de vencimiento  $T_1 = 10\text{-Dic-01}$ ,  $T_2 = 10\text{-Ene-02}$ ,  $T_3 = 10\text{-Mar-02}$  y  $T_4 = 10\text{-jun-02}$  se tiene una reducción en la varianza al incluir bonos. Lo mismo sucede para las fechas de vencimiento  $T_1 = 20\text{-Dic-01}$ ,  $T_2 = 20\text{-Feb-02}$ ,  $T_3 = 20\text{-Mar-01}$  y  $T_4 = 20\text{-jun-02}$ , así como para  $T_1 = 29\text{-Dic-01}$ ,  $T_2 = 29\text{-Ene-02}$ ,  $T_3 = 29\text{-Feb-01}$  y  $T_4 = 29\text{-jun-02}$ . Sin embargo, para fechas de vencimiento lejanas a las de los flujos, la varianza de estos incluyendo contratos a futuro

aumenta. Observe, de igual manera, que la serie de varianza mínima en el valor presente de los flujos está dado por el primer caso, en donde la reducción de la varianza es importante.

Después de generar la distribución del valor presente de un conjunto de flujos esperados incorporando contratos a futuro, con el objetivo de determinar las soluciones globales, se tiene la siguiente tabla resumen del valor en riesgo (VeR) por variaciones de mercado:

	Variaciones de mercado (c/futuros)		Variaciones de mercado s/futuros	
	$\mu$	18,345.31	$\mu$	25,5987.78
	$\sigma$	498.36	$\sigma$	18,785.23
Percentil	VP	Cambio respecto a la base	VP	Cambio respecto a la base
Máximo	20,934.65	3,564.72	99,569.57	98,152.91
0.995	20,474.68	2,153.27	93,741.11	81,674.95
0.990	19,793.72	1,343.55	84,423.88	78,193.55
0.950	19,576.92	887.38	56,477.45	39,179.59
0.900	19,445.35	567.99	41,123.45	22,103.26
0.800	19,219.85	256.88	32,675.34	14,745.66
0.700	19,378.21	193.71	27,664.72	11,359.97
0.600	19,251.76	141.92	26,293.75	6,987.29
0.500	19,183.98	97.22	24,648.33	5,357.89
0.400	19,128.52	-17.89	22,032.51	2,718.75
0.300	19,112.67	-65.89	17,772.74	-852.72
0.200	19,054.25	-188.73	13,872.42	-6,134.35
0.100	18,762.25	-395.22	8,558.37	-11,191.46
0.050	18,232.15	-769.59	1,975.21	-15,445.71
0.010	18,032.16	-1,398.21	-11,448.66	-30,728.52
0.005	17,868.44	-1,251.82	-23,826.99	-44,725.17
Mínimo	15,459.78	-3,548.72	-76,993.41	-932,932.46

Cuadro 17.3 Cuadro resumen de variaciones de mercado.

Por ejemplo, con un valor en riesgo del 0.5% (último valor en el cuadro 3) hay una reducción de 1,251.82 en el valor presente respecto a la base del método histórico y una reducción de 44,725.17 en el valor presente respecto a la base con variaciones de mercado.

## 18. Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo de inmunización del valor presente de un conjunto de flujos financieros, activos y/o pasivos, contra el riesgo de tasa de interés mediante el uso de contratos a futuro sobre bonos cupón cero. El modelo representa una herramienta indispensable para que las tesorerías de corporativos, inversionistas institucionales y fondos de pensiones administren el riesgo de tasa de interés oportuna y adecuadamente. Dado que un contrato a futuro sobre un bono cupón cero es un derivado de la tasa corta, varias metodologías de valuación de bonos basadas en la dinámica de la tasa corta o la tasa forward instantánea fueron discutidas y extendidas. Las estrategias de cobertura que se derivan del modelo propuesto conducen a una reducción significativa del riesgo de mercado.

A partir de un registro histórico de las estructuras de plazos de la tasa de interés de CETES, generadas con el modelo de Heath, Jarrow y Morton, se obtuvieron las distribuciones empíricas del valor presente de un conjunto de flujos financieros dado, con y sin inmunización mediante contratos a futuro de bonos cupón cero. El objetivo fue comparar los efectos en la varianza del valor presente de dichos flujos antes y después de la cobertura. Los conceptos de duración y convexidad monetaria desempeñaron un papel importante en el desarrollo del modelo en cuanto a la medición y control del riesgo en tasas de interés. La robustez de las estrategias obtenidas se evalúa con la metodología de valor en riesgo. Por último, a través de una ilustración sencilla, el modelo desarrollado fue aplicado para cubrir el valor presente de un conjunto de flujos financieros.

Bajo la especificación de ciertas condiciones de regularidad, siempre es posible encontrar una serie de contratos a futuro sobre bonos cupón cero que inmunicen el valor presente de un conjunto de flujos financieros. Este problema se puede resolver con programación entera en donde se tiene un conjunto de puntos factibles sin restricción en el signo y se desea encontrar aquél que minimice la varianza. En este sentido, se requiere más investigación con métodos de programación matemática. Asimismo, es importante extender el conjunto factible con otros instrumentos de cobertura, por ejemplo, opciones.

## REFERENCIAS

- Beckstrom, R., and A. Campbell (1995). An Introduction to VAR, CATS software, Palo Alto, CA.
- Bierwarg, G. O., G. G. Kaufman, and C. Khang (1978). "Duration and Bond Portfolio Analysis: An Overview". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **13**(4), pp. 671-681.
- Bierwarg, G. O., G. G. Kaufman, and A. Toevs (1983a). "Duration: Its Development and Uses in Bond Portfolio Management: An Overview". *Financial Analysts Journal*, **39**(4), pp. 15-35.
- Bierwarg, G. O., G. G., Kaufman, and A. Toevs (1983b). *Innovations in Bond Portfolio Management*, Greenwich, CT: JAI Press.
- Black, F., E. Derman, and W. Toy (1990). "A One-factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury bond options. *Financial Analysts Journal*. **46**. pp. 33-9.
- Brennan, M., and E. Schwartz (1982). "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **17**, pp. 301-329.
- Chance, D. M. (1990). "Default, Risk and the Duration of the Zero Coupon Bonds". *Journal of Finance*. **45**(1), pp. 265-274.
- Chua, J. H. (1984). "A Closed-Form Formula for Calculating Bond Duration". *Financial Analysts Journal*. **40**(3), pp. 76-78.
- Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, **53**. pp. 385-467.
- Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross (1979). "Duration and the Measurement of Basis Risk". *Journal of Business*, **52**(1), pp. 51-61.
- Fabozzi, F. (1994). *Advanced Strategies in Risk Management Fixed Income Securities*, Mc Millan.
- González-Aréchiga B., J. Díaz-Tinoco, J. y F. Venegas-Martínez (2000a). "Política fiscal y contratos de futuros: el caso de las personas físicas en México (simulación Monte Carlo y valuación Binomial)", *Estudios Económicos*, **15**(29), pp. 3-36.
- González-Aréchiga B., F. Venegas-Martínez y J. Díaz-Tinoco (2000b). "Riesgo de tasas de interés e inmunización por duración y convexidad con futuros: análisis local y de valor en riesgo", *Investigación Económica*, **60**(233), pp. 72-112.
- González-Aréchiga, B., J. Díaz-Tinoco y F. Venegas-Martínez. (2001). "Riesgo cambiario, brecha de madurez y cobertura con futuros: análisis local y de valor en riesgo", *Economía Mexicana*, Nueva Epoca, 10(2), pp. 259-290.
- Granito, M. (1984). *Bond Portfolio Immunization*. Lexington Books, D. C. Heath and Company.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology". *Econometrica*, **60**(1), pp. 77-105.
- Ho, T., and S. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest-Rate Contingent Claims". *Journal of Finance*, **41**(5), pp. 1129-1142.
- Hull, J. C., and A. White (1990). "Pricing Interest Rate Derivative Securities". *Review of Financial Studies*, **3**(4), pp. 573-592.
- Ingersoll, J. E., J. Skelton, and R. L. Weil (1978). "Duration Forty Years Later". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **13**(4), pp. 627-650.

- Islas-Camargo A. y Venegas-Martínez, F. (2003). "Pricing Derivatives Securities with Prior Information on Long-memory Volatility", *Economía Mexicana*, Nueva Época, 12, pp. 103-134.
- Jorion, P. (1999). *Valor en Riesgo*. Editorial Limusa, Grupo Noriega Editores.
- Kolb, R. W. (1998). *Practical Reading in Financial Derivatives*. In Robert W. Kolb ed., Blackwell publishers Ltd.
- Kupiec, P. (1995). "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models". *Journal of Derivatives*, 3(2), pp. 73-84.
- Longstaff, F. (1989). "A nonlinear General Equilibrium Model of the term Structure of interest rates". *Journal of Financial Economics*, 23, pp. 195-224.0
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141-83.
- Nelson, C. R., and A. F. Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of Yield Curves". *Journal of Business*, 60(4), pp. 473-489.
- Platt, R. B. (1986). *Controlling Interest Rate Risk: New Techniques and Applications for Money Management*, John Wiley & Sons.
- Schaefer, S. (1986). *Immunitization and Duration: A Review of Theory, Performance and Applications*, en J. M. Stern y D. H. Chew Jr. (eds.). *The Revolution in Corporate Finance*, New York: Basil Blackwell.
- Vasicek, O. A. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.
- Venegas-Martínez, F. y Carrillo-Rivera J. M. (2002). "Cambio tecnológico en la administración de riesgos financieros: el caso mexicano". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, 1(4), pp. 289-304.
- Venegas-Martínez, F. y J. Díaz-Tinoco (2001). "Política agrícola y contratos de futuros: un modelo de arbitraje". *Momento Económico*, 115, pp. 2-21.
- Venegas-Martínez, F., J. Díaz-Tinoco y B. González-Aréchiga (2002). "Cobertura con futuros de títulos de capital". *Momento Económico*, 120, pp. 14-34.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2000). "Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso Mexicano". *Momento Económico*, 111, pp. 20-27.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2002). "Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad". *El Trimestre Económico*, 59(2), No. 274, pp. 227-250.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "On Consumption, Investment, and Risk". *Economía Mexicana, Nueva Época*, 9(2), pp. 227-244.
- Venegas-Martínez, F. (2001a). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(9), pp. 1429-1449.
- Venegas-Martínez, F. (2001b). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, 16(32), pp. 203-226.
- Venegas-Martínez, F. (2001c). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones". *Gaceta de Economía*, 6(12), pp. 155-212.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Cobertura de flujos financieros con instrumentos de renta fija". *Estudios Económicos*, 17(2), pp. 171-192.
- Venegas-Martínez, F. (2003a). "Inmunización de flujos financieros con futuros de tasas de interés: un análisis de duración y convexidad con el modelo de Nelson y Siegel", *Revista de Administração Mackenzie*, Universidade Presbiteriana Mackenzie, Brasil, por aparecer.

- Venegas-Martínez, F. (2003b). “Bayesian Procedures for Pricing Contingent Claims: Prior Information on Volatility”. *Morfismos*, **6**(2), pp. 25-41.
- Venegas-Martínez, F. (2003c). “El líder de negocios frente a la administración de riesgos financieros”. *Harvard Business Review, América Latina*, por aparecer.
- Zenios, S. A. (1996). Financial Optimization. In Stavros A. Zenios (ed.), Cambridge University Press.